

אנליזה מודרנית - בוחן

מתרגלים: רועי אבל ותמר בר-און.
עליכם לענות על כל השאלות.
המשקל של כל סעיף הוא 22 נקודות.
הערה: בכל הבוחן, שכתוב את המילה "מדידה", הכוונה למידת לבג.
בהצלחה!

1. נגדיר קבוצה $\hat{C}$ באופן הבא: נסתכל על הקטע $[0, 1]$. בשלב הראשון נוריד ממרכזו קטע פתוח באורך חצי. בשלב השני התקבלו שני קטעים באורך $\frac{1}{4}$, ונוריד מהמרכז של כל אחד מהם קטע פתוח באורך $\frac{1}{8}$. בשלב ה- n יש 2^{n-1} קטעים, ומורידים מהמרכז של כל אחד מהם קטע פתוח באורך $\frac{1}{2 \cdot 4^{n-1}}$. (כלומר, בכל שלב יש איחוד סופי של קטעים $\bigcup I_i$). ומכל קטע I_i מורידים מאמצעו קטע פתוח באורך $\frac{1}{2}l(I_i)$, כך שנשארים שני קטעים סגורים בקצוות, שאורך כל אחד מהם הוא רבע מאורך הקטע המקורי). נסמן את הקבוצה המתקבלת בסוף התהליך ב- $\hat{C}$.

(א) הוכיחו ש- $\hat{C}$ מדידה.

(ב) חשבו את $m(\hat{C})$.

2. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. נגדיר את התומך של f להיות: $\text{supp}(f) = \text{cl}(\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\})$.

(א) הוכיחו שאם f מדידה אז $\text{supp}(f)$ קבוצה מדידה.

(ב) הוכיחו שאם $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ מדידה ו- $\int f dm = \infty$, אז לכל $M > 0$ קיימת פונקציה $g_M: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ כך ש: g_M מדידה, $m(\text{supp}(g_M)) < \infty$, $0 \leq g_M \leq f$ ו- $\int g_M dm > M$.

3. תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה כלשהי. הוכיחו/הפריכו:
אם f^2 מדידה, אז f מדידה.