

פתרון לתרגיל בית 3.

שאלה 2

נתונה מערכת משוואות הבאה

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 100 \\ 1 & 10 & -0.001 \\ 3 & -100 & 0.01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

החישובים בכל הסעיפים צריך לבצע עם דיוק של 4 ספרות אחרי הנקודה.

(א) פתור על ידי אלימינציה גאוס עם שחלוף שורות (pivoting חלקי)

$$[U, L, P] = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -3 & 100 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & -0.001 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -100 & 0.01 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -100 & 0.01 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & -0.001 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 100 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R2=R2-0.3333R1 \\ R3=R3-0.6667R1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -100 & 0.01 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 43.3300 & -0.0043 & 0.3333 & 1 & 0 \\ 0 & 63.6700 & 99.9933 & 0.6667 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -100 & 0.01 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 63.6700 & 99.9933 & 0.6667 & 1 & 0 \\ 0 & 43.3300 & -0.0043 & 0.3333 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R3=R3-0.6805R2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -100 & 0.01 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 63.6700 & 99.9933 & 0.6667 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -68.0497 & 0.3333 & 0.6805 & 1 \end{array} \right)$$

$$Ly=Pb, Ux=y \Leftrightarrow LUx=PAx=Pb \Leftrightarrow LU=PA$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -100 & 0.01 \\ 0 & 63.6700 & 99.9933 \\ 0 & 0 & -68.0497 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.6805 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 1 & 0 \\ 0.3333 & 0.6805 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6667 & 1 & 0 \\ 0.3333 & 0.6805 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0.6805 \end{pmatrix}$$

(ב) פתור על ידי אלימינציה גאוס עם pivoting מלא.

$$[U, L, Prows, index] = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 100 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 1 & 10 & -0.001 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 3 & -100 & 0.01 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{C1 \leftrightarrow C3} \begin{pmatrix} 100 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ -0.001 & 10 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0.01 & -100 & 3 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R2=R2-0.0000 \cdot R1 \\ R3=R3-0.0001 R1}} \begin{pmatrix} 100 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & 10 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & -99.9997 & 2.9998 & | & 0.0001 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \begin{pmatrix} 100 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & -99.9997 & 2.9998 & | & 0.0001 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 10 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R3=R3-0.1R2} \begin{pmatrix} 100 & -3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 & | & 3 \\ 0 & -99.9997 & 2.9998 & | & 0.0001 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0.7 & | & 0 & 0.1 & 1 & | & 0 & 1 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & -3 & 2 \\ 0 & -99.9997 & 2.9998 \\ 0 & 0 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.0001 & 1 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.0001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(ג) פתור את המערכת על ידי אלימינציה גאוס עם scaling.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 100 & 1 \\ 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 3 & -100 & 0.01 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow s=[100 \ 10 \ 100]$$

$$1) \ r^{(1)}=[0.02 \ \mathbf{0.1} \ 0.03], s(\text{new})=[10 \ 100 \ 100]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 100 & 1 \\ 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 3 & -100 & 0.01 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 2 & -3 & 100 & 1 \\ 3 & -100 & 0.01 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R2=R2-2R1 \\ R3=R3-3R1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 0 & -23 & 100.002 & 1 \\ 0 & -130 & 0.013 & 0 \end{array}\right)$$

$$2) \ r^{(2)}=[\times \ 0.23 \ \mathbf{1.3}]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 0 & -23 & 100.002 & 1 \\ 0 & -130 & 0.013 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R2 \leftrightarrow R3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 0 & -130 & 0.013 & 0 \\ 0 & -23 & 100.002 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R3=R3-0.1769R2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 0 & -130 & 0.013 & 0 \\ 0 & 0 & 99.9997 & 1 \end{array}\right)$$

$$3) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 0 & -130 & 0.013 & 0 \\ 0 & 0 & 99.9997 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

(ד) פתור על ידי אלימינציה גאוס – ג'ורדן בלי pivoting.

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 100 & 1 \\ 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 3 & -100 & 0.01 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R1=R1/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.5 & 50 & 0.5 \\ 1 & 10 & -0.001 & 0 \\ 3 & -100 & 0.01 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R2=R2-R1 \\ R3=R3-3R1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.5 & 50 & 0.5 \\ 0 & 11.5 & -50.001 & -0.5 \\ 0 & -95.5 & -150.01 & -1.5 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R2=R2/11.5} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1.5 & 50 & 0.5 \\ 0 & 1 & -4.3479 & -0.0435 \\ 0 & -95.5 & -150.01 & -1.5 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R1=R1+1.5R2 \\ R3=R3+95.5R2}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 43.4781 & 0.4347 \\ 0 & 1 & -4.3479 & -0.0435 \\ 0 & 0 & -565.2344 & -5.6542 \end{array}\right) \\ &\xrightarrow{R3=R3/(-565.2344)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 43.4781 & 0.4347 \\ 0 & 1 & -4.3479 & -0.0435 \\ 0 & 0 & 1 & 0.01 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{R1=R1-43.4781R3 \\ R2=R2+4.3479R3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.0001 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.01 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0001 \\ 0 \\ 0.01 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

שאלה 3

נתונה מטריצה:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 & 4 \\ 12 & -8 & 4 & 10 \\ 3 & -13 & 3 & 3 \\ -6 & 4 & 2 & -18 \end{pmatrix}$$

(א) בצעו פירוק LU עם partial pivoting באמצעות אלימינציה גאוס. הקפידו לשמור על מטריצה P (מטריצת פרמוטציות). השוו את התוצאה שקיבלתם עם מה שמקבלים ב-Matlab ע"י פקודת $[l,u,p]=lu(A)$.

(ב) פתרו את מערכת המשוואות $Ax = b$ כאשר $b = (0 \ -10 \ -39 \ -16)^T$ והשוו את התוצאה עם Matlab.

פתרון:

א.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 12 & -8 & 4 & 10 \\ 0 & -11 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 3/11 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2/11 & 1/11 & 1 \end{pmatrix}$$

ב.

$$\begin{aligned} LU = PA, \quad LUx = Pb \\ Ly = Pb \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & -2/11 & 1/11 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -39 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -39 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

אחרי חילוף לפניים

$$y = \begin{pmatrix} -10 \\ -36.5 \\ -21 \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix}$$

אחרי חילוף לאחור

$$Ux = y \Rightarrow \begin{pmatrix} 12 & -8 & 4 & 10 \\ 0 & -11 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 3/11 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -10 \\ -36.5 \\ -21 \\ \frac{3}{11} \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

שאלה 4

נתונה מערכת משוואות

$$\begin{array}{l} 5x - y + z = 10 \\ 2x + 8y - z = 11 \\ -x + y + 4z = 3 \end{array} \quad (\text{B}) \quad \begin{array}{l} -x + 3y = 1 \\ 6x - 2y = 2 \end{array} \quad (\text{A})$$

עבור כל אחת מהמערכות תבצעו את הפעולות הבאות:

- (א) בהינתן $x_0 = \bar{0}$ תשתמשו באיטרצית יעקובי כדי למצוא x_1, x_2, x_3, x_4 ;
- (ב) בהינתן $x_0 = \bar{0}$ תשתמשו באיטרצית גאוס-זיידל כדי למצוא x_1, x_2, x_3, x_4 ;
- (ג) האם מתקיים תנאי הכרחי ומספיק ולהתכנסות השיטות ? בדוק זאת עבור כל שיטה עבור שתי המערכות.

פתרון :

(א) (א) $x_1 = (-1, -1), x_2 = (-4, -4), x_3 = (-13, -13)$ **איטרציה מתבדרת ומתרחקת מהפתרון** (0.5, 0.5)

(ב) $x_1 = (2, 1.375, 0.75), x_2 = (2.125, 0.9688, 0.9063), x_3 = (2.0125, 0.957, 1.0391)$ **איטרציה מתכנסת ל-** (2, 1, 1) ;

(ב) (א) $x_1 = (-1, -4), x_2 = (-13, -40), x_3 = (-121, -361)$ **איטרציה מתבדרת ומתרחקת מהפתרון**

(0.5, 0.5)

(ב) $x_1 = (2, 0.875, 1.03125), x_2 = (2.96875, 1.01171875, 0.989257813), x_3 = (2.00449219, 0.99753418, 1.0017395)$

איטרציה מתכנסת ל- (2, 1, 1) ;

$$\begin{array}{l} 5x - y + z = 10 \\ 2x + 8y - z = 11 \\ -x + y + 4z = 3 \end{array} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 8 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} |5| > |-1| + |1| = 2 \\ |8| > |2| + |-1| = 3 \\ |4| > |-1| + |1| = 2 \end{array} \quad (\text{ג) עבור (B)})$$

כאן A – בעלת אלכסון דומיננטי ממש, לכן איטרציות יעקובי וגם גאוס זיידל

יתכנסו לכל ניחוש התחלתי.

עובר (A) : אפשר לראות כי המטריצ הלא בעלת אלכסון דומיננטי, לכן נבדוק רדיוס

הספקטולי.

$$\begin{matrix} -x+3y=1 \\ 6x-2y=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

איטרצית יעקובי :

$$x_{k+1} = -D^{-1}(L+U) + D^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 3 & 0-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 3 \Rightarrow \rho(B) > 1$$

לכן האיטרציה לא מתכנסת לכל ניחוש התחלתי.

איטרצית גאוס-זיידל :

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0-\lambda & 3 \\ 0 & 9-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 9 \Rightarrow \rho(B) > 1$$

לכן האיטרציה לא מתכנסת לכל ניחוש התחלתי.