

תרגיל בית 2

1. בטופולוגיה, קבוצה A תקרא מושלמת (Perfect set) אם ניתן להתקרב ככל שנרצה לכל $x \in A$ ע"י איברים מ A . במילים אחרות קבוצה היא מושלמת אם אין לה נקודות מבודדות.

א. הראו כי קבוצת קנטור C הינה מושלמת.

בטופולוגיה, קבוצה A תקרא דלילה (nowhere dense set) אם $\text{Int}(Cl(A)) = \emptyset$ במילים, A תקרא דלילה אם הפנים של הסגור של A הינה קבוצה ריקה.

ב. הראו כי קבוצת קנטור C אותה ראינו בתרגול הינה דלילה.

2. ראינו בתירגול שאם המידה של קבוצה סגורה (קבוצת קנטור למשל) הינה 0 אז היא איננה יכולה להכיל אף קטע פתוח. האם הכיוון השני נכון גם כן? האם קבוצה דלילה בהכרח תהיה בעלת מידה 0?

נבנה דוגמה נגדית. תהי $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ סדרה של מספרים ממשיים חיוביים כך ש $0 < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} c_k < 1$

בדומה לאופן בו בנינו את קבוצת קנטור C , נוריד ממרכז הקטע $[0,1]$ קטע באורך c_k על מנת לקבל את הקבוצה $\hat{C}_1$. כעת נוריד ממרכז כל אחד משני הקטעים שנשארו קטעים באורך c_2 על מנת לקבל את הקבוצה $\hat{C}_2$. בשלב ה k נוריד 2^{k-1} קטעים ממרכז כל אחד מהקטעים שנשארו

מהשלב ה $k-1$ על מנת לקבל את הקבוצה $\hat{C}_k$. נגדיר את $\hat{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \hat{C}_k$ להיות קבוצת קנטור המוכללת.

א. הראו כי $\hat{C}$ קבוצת קנטור המוכללת הינה קומפקטית ומושלמת.

ב. הראו כי $\hat{C}$ הינה דלילה.

ג. הראו כי $m(\hat{C}) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1} c_k$.

רמז: השתמשו בעובדה כי מידה היא "רציפה". כלומר, אם $\{A_n\}$ סדרה של קבוצות כך ש

$$A_k \supseteq A_{k+1} \text{ ו } m(A_1) < \infty \text{ אזי } m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(A_n).$$

3. תהי m מידת לבג. נניח כי לכל n A_n הינה קבוצה מדידה ב $[0,1]$. תהי B קבוצת כל ה x - ים המופיעים באינסוף קבוצות A_n .

א. הראו כי B הינה מדידה לבג. (רמז: הציגו את B כך $B = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$)

ב. אם $m(A_n) > \delta > 0$ לכל n , הראו כי $m(B) > \delta$.

ג. אם $\sum_{i=1}^{\infty} m(A_n) < \infty$ אז $m(B) = 0$.

ד. תנו דוגמא למקרה בו $\sum_{n=1}^{\infty} m(A_n) = \infty$ אבל $m(B) = 0$.