

פתרון תרגיל בית מספר 5

תרגיל 3.3

נפתור רק את סעיף ב': יהיו $k = h, l = r$ מוגדר אם ורק אם $B + C$. $B \in \mathbb{F}^{k \times l}, C \in \mathbb{F}^{h \times r}, A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ואז $A(B + C) \in \mathbb{F}^{m \times l}$ מוגדר אם ורק אם $n = k$ ואז $A(B + C) \in \mathbb{F}^{m \times l}$. עפ"י הנ"ל נקבל $AB + AC \in \mathbb{F}^{m \times l} \Rightarrow AB, AC \in \mathbb{F}^{m \times l}$ ובסה"כ קיבלנו כי אם $A(B + C)$ מוגדרת אז גם $AB + AC$ מוגדרת וכן סדר המטריצות שווה. באופן דומה ניתן להוכיח ש אם $AB + AC$ מוגדרת אזי $A(B + C)$ מוגדרת והסדרים של המטריצות שווים.

נראה שוויון האיברים במקומות i, j בשתי המטריצות. נסמן $B + C = D$ אזי

$$\begin{aligned} (A(B + C))_{ij} &= (AD)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} d_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} (b_{kj} + c_{kj}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=1}^n (a_{ik} b_{kj} + a_{ik} c_{kj}) = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^n a_{ik} c_{kj} = (AB)_{ij} + (AC)_{ij} \end{aligned}$$

השוויון (*) נובע מחוק הפילוג בשדה.

תרגיל 4.2

נפתור רק את סעיף ב'.

אם $A \in \mathbb{F}^{m \times n}, B \in \mathbb{F}^{n \times k}$ אזי $A^t \in \mathbb{F}^{n \times m}, B^t \in \mathbb{F}^{k \times n}$, ולכן הכפל $B^t A^t$ מוגדר היטב והתוצאה מקיימת $B^t A^t \in \mathbb{F}^{k \times m}$. ניתן לראות גם כי $(AB)^t \in \mathbb{F}^{k \times m}$.

$$(ab)^t_{ij} = (ab)_{ji} = \sum_{p=1}^n a_{jp} b_{pi} = \sum_{p=1}^n (a^t)_{pj} (b^t)_{ip} = \sum_{p=1}^n (b^t)_{ip} (a^t)_{pj} = (b^t a^t)_{ij}$$

השתמשנו רק בהגדרת המטריצה המשוחלפת, בהגדרת כפל מטריצות ובעובדה שכפל בשדה הוא חילופי.

תרגיל 4.3

$A \in \mathbb{F}^{m \times n} \Leftrightarrow A^t \in \mathbb{F}^{n \times m}$, מכיוון ש $A = A^t$ נקבל ש $m = n$.

תרגיל 4.6

- א. נתון שמטריצה $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ היא סימטרית: $A^t = A$, וגם אנטי סימטרית, כלומר $A^t = -A$.
 ולכן בסה"כ נקבל $A = -A \Rightarrow 2A = 0$. כן ש- $\mathbb{R}$ הוא ממאפיין 0, נקבל $A = 0$.
- ב. בכל שדה קיימים האיברים 0,1 ולכן קיימת מטריצת היחידה I . לפי הנתון מתקיים $I = -I$
 ולכן $2I = 0$. בפרט, $1+1=0$ ולכן המאפיין של השדה הוא 2.

תרגיל 5.1

נניח ש- $A \in F^{n \times m}$, לכן $A^t \in F^{m \times n}$. אם נכפיל את שתי המטריצות, נקבל לפי הגדרת הכפל $AA^t \in F^{m \times m}$ ולכן היא ריבועית.

תרגיל 5.2

נוכיח כיוון אחד, למשל: $AI = A$.

נשים לב כי- $I = (e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n)$ (ז"א מטריצה אשר עמודותיה הן ווקטורי העמודה e_i). כעת לפי תרגיל 3.6 אנחנו מקבלים:

$$AI = A(e_1 \ e_2 \ \dots \ e_n) = (Ae_1 \ Ae_2 \ \dots \ Ae_n) = (C_1(A) \ \dots \ C_n(A)) = A$$

וקיבלנו בדיוק את הדרוש!