תרגיל 12

הגדרה 1. יהי M מודול מעל R. נאמר שאיבר $0 \neq x \in M$ הוא מפותל אם קיים $0 \neq r \in R$ כך ש-$rx = 0$ (אם R אינו תחום שלמות, נאמר ש-x מפותל רק אם קיים r רגולרי כך ש-$rx = 0$).
נגדיר את הפיתול של M להיות הקבוצה

$$Tor_R(M) = \{m \in M such that \exists (0 \neq r \in R),\, r \cdot m = 0\}$$

נקרא ל-M מפותל אם כל איבריו מפותלים, כלומר $Tor_R(M) = M$. נאמר ש-M חסר פיתול אם אין בו איברים מפותלים שונים מאפס.

1. יהי R תחום שלמות. אז $Tor(M)$ הוא תת־מודול של M.
במקרה כזה, ראוי לקרוא ל-$Tor(M)$ תת־מודול הפיתול של M

הוכחה. יהי $x \in Tor(M)$ כלשהו. צריך להראות כי $r \cdot x \in Tor(M)$ לכל $r \in R$.
לפי הגדרה, קיים $s \in R$ כך ש-$s \cdot x = 0$. לכן $s \cdot (rx) = r \cdot (sx) = 0$ וקיבלנו כי $rx \in Tor(M)$.
אם $x, y \in Tor(M)$, אז קיימים $s, s' \in R$ כך ש-$sx = s'y = 0$, ולכן

$$ss'(x - y) = s'(sx) - s(s'y) = 0$$

ונסיק כי $x - y \in Tor(M)$. כמובן ש-$0 \in Tor(M)$ ולכן הוא לא ריק. $\square$

2. יהי M מודול מעל R עבורו $Tor(M)$ הוא תת־מודול. אז $M/Tor(M)$ הוא מודול חסר פיתול מעל R.
פתרון:

הוכחה. יהי $m \notin Tor(M)$ ונניח בשלילה שקיים $r \in R$ שאינו מחלק אפס עבורו

$$r\,(m + Tor(M)) = rm + Tor(M) = 0_{M/Tor(M)} = Tor(M)$$

כלומר $rm \in Tor(M)$. לכן קיים $s \in R$ שאינו מחלק אפס כך ש-$s(rm) = 0$, ולכן $(sr)m = 0$, וקיבלנו סתירה לפיה $m \in Tor(M)$ $\square$

3. הראו כי M הוא מודול נאמן מעל $R/Ann(M)$.
פתרון. יהי $r + Ann(M) \in R/Ann(M)$. אנחנו רק נראה שהפעולה

$$(r + Ann(M)) \cdot m = rm$$

מוגדרת היטב לכל $m \in M$, ואת שאר הדרישות ממודול תוכלו להוכיח בבית. נניח

$$r + Ann(M) = r' + Ann(M)$$

כלומר $r - r' \in Ann(M)$. לכן קיים $s \in Ann(M)$ כך ש-$r = r' + s$. אז

$$rm = (r + Ann(M)) \cdot m = (r' + s + Ann(M)) \cdot m = (r' + s)\, m = r'm$$

כעתת נניח ש$(r + Ann(M))M = 0$. אזי, $rM + Ann(M)M = 0$. אבל $Ann(M)M = 0$, ולכן נקבל $rM = 0$. כלומר, $r \in Ann(M)$. מכאן, $r + Ann(M) = 0 + Ann(M)$.

4. יהי M מודול מעל R ו$I \trianglelefteq R$. הוכיחו שM הוא מודול מעל R/I עם הפעולה הטבעית $(r + I)m = rm$ אמ"ם $I \subseteq Ann(M)$
הוכחה:

   הפעולה מוגדרת היטב אמ"ם לכל $i \in I$, $im = 0$. כלומר, $i \in Ann(M)$.

5. יהיו M, N מודולים איזומורפיים מעל R. אז $Ann(M) = Ann(N)$.

הוכחה. יהי $\varphi : M \to N$ איזומורפיזם של מודולים מעל R. יהי $r \in Ann(M)$, אזי לכל $m \in M$ מתקיים $rm = 0$. לכן

$$0 = \varphi(0) = \varphi(rm) = r\varphi(m)$$

כלומר $r \in Ann(\Im\varphi) = Ann(N)$. משיקולי סימטריה, נסיק כי $Ann(M) = Ann(N)$.
□