05/09/18

פתרון מבחן מועד ב' – 88-133 אינפי 2 תשע"ח

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 22 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

משך המבחן: שלוש שעות. מרצה: ד"ר ארז שיינר.

1. חשבו את האינטגרלים הבאים:

א. $\int \sin\left(\ln(x)\right) dx$ ב. $\int \frac{2^x}{1+2^x+4^x} dx$

2. קבעו האם האינטגרלים הבאים מתכנסים והוכיחו קביעתכם.

א. $\int_0^\infty e^{\left(\frac{1}{x}-x\right)} dx$

נמצא נקודות חשודות ונבדוק האם הן בעייתיות

חשודות: $0, \infty$.

נבדוק האם הפונקציה חסומה באיזור אפס, ננסה ע"י חישוב גבול.

$$\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}-x} = e^{\infty} = \infty$$

לכן שתי הנקודות בעייתיות, ונפצל את האינטגרל לשניים

$$\int_{\boxed{0}}^{1} e^{\frac{1}{x}-x}\, dx$$

מדובר באינטגרל חיובי, ננסה להשוות לאינטגרל המתבדר

$$\int_{\boxed{0}}^{1} \frac{1}{x} dx$$

נחשב את גבול מנת הפונקציות בנקודה הבעייתית.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}-x}}{\frac{1}{x}} = \left\{t = \frac{1}{x}\right\} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{t-\frac{1}{t}}}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{t}}} \cdot \frac{e^t}{t} = 1 \cdot \infty$$

לכן פונקציה בשאלה גדולה באופן גבולי מהפונקציה אליה השווינו וכיוון שהשווינו לאינטגרל מתבדר, גם האינטגרל שלנו מתבדר.

כעת כיוון שהאינטגרל בקטע זה מתבדר, האינטגרל בשאלה <u>כולו</u> מתבדר.

ב. $\int_0^\infty \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)dx$

חשודות $0,\infty$

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\pi}{2}$$

לכן 0 אינו נקודה בעייתית, והאינטגרל בקטע $[0,1]$ מתכנס.

נשווה את האינטגרל הנותר

$$\int_1^{\boxed{\infty}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) dx$$

עם האינטגרל המתכנס

$$\int_1^{\boxed{\infty}} \frac{1}{x^2} dx$$

נחשב את גבול מנת הפונקציות בנקודה הבעייתית.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \left\{t = \frac{1}{x^2}\right\} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan(t)}{t} = 1$$

לכן הם חברים, ולכן גם האינטגרל שלנו מתכנס.

.3

א. קרבו את $\sqrt{e}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

ב. קרבו את $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

4. נביט בסדרת הפונקציות $f_n(x)=\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}$.

א. קבעו האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש בקטע $(-\infty,\infty)$.

ראשית נחשב את פונקצית הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}=\sqrt{x^2}=|x|$$

נחשב את סדרת החסמים

$$d_n=\sup_{\mathbb{R}}\left|\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}\right|=\sup_{\mathbb{R}}\left|-\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}\right|=\sup_{\mathbb{R}}\left(\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{n}}}\right)$$

בתחום $[0,\infty)$ כאשר x גדל, המכנה גדל והביטוי קטן ולכן המקסימום בתחום זה הוא ב0.

באופן דומה, המקסימום ב$(-\infty,0]$ הוא ב0, ולכן זה הsup.

כלומר

$$d_n=\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$$

לכן יש התכנסות במ"ש.

ב. קבעו האם סדרת הנגזרות $f_n'(x)$ מתכנסת במ"ש בקטע $(-\infty,\infty)$.

לא. אם סדרת הנגזרות הייתה מתכנסת במ"ש, כיוון שהן רציפות, והסדרה המקורית מתכנסת בנקודה אזי פונקצית הגבול של הסדרה המקורית הייתה צריכה להיות גזירה בכל התחום, זה לא המצב.

5. תהי פונקציה המוגדרת בקטע $[0,1]$ ומקיימת $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$.

א. הוכיחו כי לכל חלוקה P של הקטע $[0,1]$ ניתן לבחור נקודות C כך שסכום הרימן מקיים $S_R(f,P,C)>1$.

תהי חלוקה, נבחר נקודות אקראיות בכל תת קטע פרט לראשון, ונקבל

$$S_R(f,P,C)=f(c_1)(x_1-x_0)+\sum_{k=2}^{n} f(c_k)(x_k-x_{k-1})$$

כעת הביטוי $\sum_{k=2}^{n} f(c_k)(x_k-x_{k-1})$ קבוע ו(x_1-x_0) חיובי ולכן עבור $f(c_1)$ גדול מספיק נקבל שסכום הרימן גדול מ1.

$$c_1\in[x_0,x_1]=[0,x_1]$$

כיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\infty$$

ניתן לבחור c_1 בסביבה זו של אפס בה $f(c_1)$ גדול מספיק.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם האינטגרל $\int_0^1 f(x)dx$ מתכנס, אזי $\int_0^1 f(x)dx\geq 1$.

הפרכה:

קל להוכיח כי:

$$\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=1$$

נחלק ב2

$$\int_0^1 \frac{1}{4\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2}<1$$