

# קומבינטוריקה להנדסה - תרגול 5

16 בנובמבר 2020

## 1 אינדוקציה שלימה

הכללת הצעד: ניתן בצעד להוכיח את הטענה הבאה:

$$\forall n \in \mathbb{N} : (\forall k \leq n : P(k)) \Rightarrow P(n+1)$$

כלומר, אם הטענה נכונה עד  $n$  (כולל) אז היא נכונה גם עבור  $n+1$ .  
תרגילים:

1. טבלת שוקולד עם  $n$  קוביות היא אוסף של  $n$  ריבועים המחוברים בצלעות (בצורה קשירה - אם מרימים ריבוע כל הטבלה מורמת). הטבלה היא לאו דוקא מלבן, למשל יכול להיות מלבן עם עוד ריבוע אחד יוצא החוצה איפשהו. חיתוך של הטבלה זה חיתוך אורך שלם או רוחב שלם. בידוד של הטבלה זה הבאתה לריבועים בודדים. הוכיחו שלכל  $n \geq 1$  מתקיים: כל טבלה עם  $n$  קוביות ניתנת לבידוד בעזרת  $n-1$  חיתוכים. פתרון: בסיס האינדוקציה: עבור  $n=1$  אכן ניתן לבודד קוביה אחת בעזרת 0 חיתוכים. צעד האינדוקציה: נניח נכונות לכל  $1 \leq k \leq n$  (שבהינתן טבלה עם  $k$  קוביות ניתן לבודד אותה בעזרת  $k-1$  חיתוכים), ונוכיח עבור  $n+1$ . נתונה טבלה עם  $n+1$ . נחתוך איפשהו את הטבלה. נקבל טבלה אחת של  $1 \leq k \leq n$  קוביות, ובטבלה השנייה נקבל  $1 \leq n+1-k \leq n$  קוביות. כעת, מהנחת האינדוקציה נקבל שאת הטבלה עם  $k$  הקוביות ניתן לבודד בעזרת  $k-1$  חיתוכים, ואת הטבלה עם  $n+1-k$  הקוביות ניתן לבודד בעזרת  $n-k$  חיתוכים. ובסה"כ בודדנו את הטבלה בעזרת:

$$1 + (k-1) + (n-k) = n$$

חיתוכים.

## 2 עקרון הסכום והמכפלה

הערה: מעכשיו הקבוצות סופיות אלא אם נאמר בפירוש אחרת.

ראיתם בהרצאה שעבור  $A, B$  סופיות וזרות מתקיים:

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

תרגילים:

1. תהינה  $A, B$  קבוצות סופיות כך ש-  $A \subset B$ . הוכיחו:  $|B \setminus A| = |B| - |A|$ .  
פתרון: נשים לב:  $B = A \cup (B \setminus A)$  (נראה לי שזה היה בש.ב., אם לא - אז עכשיו: כיון ש-  $A \subset B$  נוכל לקחת את  $B = U$  להיות הקבוצה האוניברסלית לשאלה זו, אז  $B \setminus A = A^c$ , ונקבל:  $A \cup (B \setminus A) = A \cup A^c = U = B$ ). ומתקיים:  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ , כי נניח בשלילה שקיים איבר  $x \in A \cap (B \setminus A)$ , לכן  $x \in A$  וגם  $x \in B \setminus A$  (וגם  $x \notin A$ ). בסה"כ קיבלנו  $x \in A$  וגם  $x \notin A$  בסתירה. כלומר:  $A, B \setminus A$  זרות. כעת:

$$|B| = |A \cup (B \setminus A)| = |A| + |B \setminus A|$$

נעביר את  $|A|$  אגף ונקבל הדרוש.

2. תהינה  $A, B$  קבוצות סופיות. הוכיחו:  $|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$ .  
פתרון: נראה שמתקיים:  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ , ושזהו איחוד זר: שיוויון בעזרת הכלה דו כיוונית:  $\subset$ : יהי  $x \in A$  נחלק למקרים:  
אם  $x \in B$  אז  $x \in A \cap B$  ולכן באיחוד.  
אם  $x \notin B$  אז  $x \in A \setminus B$  ולכן באיחוד.  
 $\supset$ : יהי  $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ . נשים לב שבכל מקרה מבין המאוחדים  $x \in A$ .  
הקבוצות זרות כי אם בשלילה יש  $x \in (A \setminus B) \cap (A \cap B)$  זאת אומרת בפרט  $x \in B$  וגם  $x \notin B$  בסתירה. לכן אין איברים בחיתוך והן זרות.  
כעת נקבל:

$$|A| = |(A \setminus B) \cup (A \cap B)| = |A \setminus B| + |A \cap B|$$

3. תהינה  $A, B$  קבוצות סופיות. חשבו את  $|A \Delta B|$ .  
פתרון: נשתמש בעקרון הסכום המוכלל:  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ . כעת, נשים לב שמתקיים:  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

4. תהינה  $A, B$  קבוצות סופיות. הוכיחו:  $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ . בהרצאה?

5. כמה פונקציות יש מ-  $[n]$  ל-  $[m]$ ?