

תרגיל 5

22 ביולי 2016

תרגיל 1. תהינה $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציות רציפות. חשבו את

$$\iint_S f(x) dy dz + g(y) dz dx + h(z) dx dy$$

כאשר S הוא השפה של התיבה $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq z \leq c$ עם הנורמל החיצוני.

פתרון: S מהווה איחוד של 6 משטחים:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{0\} \times [0, b] \times [0, c] \\ S_2 &= \{a\} \times [0, b] \times [0, c] \\ S_3 &= [0, a] \times \{0\} \times [0, c] \\ S_4 &= [0, a] \times \{b\} \times [0, c] \\ S_5 &= [0, a] \times [0, b] \times \{0\} \\ S_6 &= [0, a] \times [0, b] \times \{c\} \end{aligned}$$

הנורמל החיצוני על המשטח S_1 הינו $(-1, 0, 0)$ ועל S_2 הוא $(1, 0, 0)$. לפי הנוסחה נקבל

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (f(x), g(y), h(z)) \cdot (-1, 0, 0) dS &= \int_{S_1} f(x) dS \\ &= \int_0^b \int_0^c -f(0) dy dz \\ &= -bc f(0) \end{aligned}$$

באופן דומה נקבל

$$\int_{S_2} (f(x), g(y), h(z)) \cdot N dS = bc f(a)$$

וכך נחשב את שאר האינטגרלים. נחבר הכל ונקבל

$$ab(h(c) - h(0)) + ac(g(b) - g(0)) + bc(f(a) - f(0))$$

תרגיל 2. בעזרת משפט הדיוורגנט הוכיחו את המשפט הבא. שטף של השדה (x, y, z) דרך מעטפת של גוף כלשהו שווה ל-3 פעמים הנפח שלו.

פתרון: מתקיים

$$\iint_{\partial V} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \iiint_V \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} dx dy dz$$

תרגיל 3. חשבו את האיטגרל

$$\iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$$

כאשר S הוא השפה של קוביית היחידה עם הנורמל החיצוני.

פתרון: לפי תרגיל אחד או ישירות על ידי הפעלת משפט הדיוורגנט נקבל 3.

תרגיל 4. יהי v וקטור קבוע ו S משטח סגור. הוכיחו שמתקיים

$$\iint_S \cos(n, v) dS = 0$$

כאשר n הוא נורמל היחידה החיצוני ל S .

פתרון: נזכר שקוסינוס בין זוויות מוגדר על ידי

$$\cos(n, v) = \frac{\langle n, v \rangle}{\|n\| \|v\|} = \frac{\langle n, v \rangle}{\|v\|}$$

נציב באיטגרל ונקבל $=V$

$$\iint_S \cos(n, v) dS = \iint_S \frac{\langle n, v \rangle}{\|v\|} dS = \frac{1}{\|v\|} \iint_S v \cdot n dS$$

נפעיל את משפט הדיברגנט ונקבל $\operatorname{div} V = 0$ ומכאן התוצאה נובעת.

תרגיל 5. חשבו את $\iint_S F \cdot \hat{n} dS$ במקרים הבאים כאשר $\hat{n}$ הוא הנורמל החיצוני.

$$1. S : x^2 + y^2 + z^2 = 4, F = (yx, 2y, -z)$$

פתרון: לפי משפט הדיברגנט נקבל:

$$\begin{aligned} \iint_S F ds &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 4} \operatorname{div} F dx dy dz \\ &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 4} y + 1 dx dy dz \end{aligned}$$

נסמן את התחום ב v ונעבור לקואורדנטות כדוריות.

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi$$

$$z = r \cos \theta$$

נציב ונקבל את האינטגרל

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + r \sin \theta \sin \phi) r^2 \sin \theta d\phi d\theta dr = \\ \frac{32}{3}\pi + \int_0^2 r^3 \int_0^\pi \sin^2 \theta \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi d\theta dr = \frac{32}{3}\pi \end{aligned}$$

$$S : z = \sqrt{x^2 + y^2}; 0 \leq z \leq 1, F = (y - z, z - x, x - y - 1) \quad 2.$$

פתרון: מתקיים

$$\iint_{S \cup S'} F \hat{n} dS = \iint_S F \hat{n} dS + \iint_{S'} F \hat{n} dS$$

כאשר $S' = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, z = 1\}$ לפי משפט הדיברגנט מתקיים:

$$\iint_{S \cup S'} F \hat{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} F dV$$

כאשר $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ מתקיים $\operatorname{div} F = 0$ ולכן

$$\iiint_V \operatorname{div} F dV = 0$$

ומתקיים

$$\iint_S F \hat{n} dS = - \iint_{S'} F \hat{n} dS$$

נקבל:

$$\begin{aligned} \iint_{S'} F \hat{n} dS &= \iint_{S'} (y - z, z - x, x - y - 1) (0, 0, 1) dS \\ &= \iint_{S'} x - y - 1 dS \\ &= \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} (x - y - 1) dx dy \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r (r \cos \theta - r \sin \theta - 1) dr d\theta = -\pi \end{aligned}$$

ניקח עם סימן - ונקבל את האינטגרל שלנו $\iint_S F \hat{n} dS = \pi$

$$S = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2, F = (x^2, y^2, z^2) \quad .3$$

פתרון: נשתמש במשפט הדיבבגנט. נקב

$$\begin{aligned} \iint_S F \hat{n} dS &= \iiint_{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2} \operatorname{div} F dV \\ &= \iiint_V (2x + 2y + 2z) dV \end{aligned}$$

כאשר $V = \left\{ (x, y, z) \mid (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq R^2 \right\}$ נעבור לקואורדינטות כדוריות הבאות:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi + a \\ y &= r \sin \theta \sin \phi + b \\ z &= r \cos \theta + c \\ (r, \theta, \phi) &\in [0, R] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \end{aligned}$$

נקבל

$$\begin{aligned} \iiint_V (2x + 2y + 2z) dV &= \\ 2 \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (r \sin \theta \cos \phi + r \sin \theta \sin \phi + r \cos \theta + a + b + c) d\theta d\phi dr &= \\ \frac{8}{3} \pi R^3 (a + b + c) \end{aligned}$$

$$, F = (3x, 4y, -z) \quad .4$$

$$S : \{ (x, y, z) : ((x^2 + y^2 = z) \vee (x^2 + y^2 = z^2)) \wedge (0 \leq z \leq 1) \}$$

פתרון: לפי משפט הדיברגנט נקבל

$$\begin{aligned}
 \iint_S F \hat{n} dS &= \iiint_V \operatorname{div} F dV \\
 &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 6 dz \right) dx dy \\
 &= \int_0^1 6r \int_0^{2\pi} r - r^2 d\theta dr \\
 &= \int_0^1 12\pi(r^2 - r^3) dr \\
 &= 12\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$