תרגיל 5

.

1. יהיו $T_m, \ldots T_1 : V \to V$ ה"ל. הוכיחו כי
ההרכבה $T_1 \circ \ldots \circ T_m$ הפיכה אמ"מ כל אחת הפיכה (כלומר, לכל $1 \le i \le m$ ה"ל T_iהפיכה)

2.

(א) יהיו V, W שני תתי מרחבים מעל שדה $\mathbb{F}$ בעלי מימדים n, m בהתאמה. עוד יהיו E בסיס ל V, F בסיס ל W וותהא $T : V \to W$ ה"ל. תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה המקיימת

$$\forall v \in V : \; [Tv]_F = A\,[v]_E$$

הוכיחו כי $A = [T]_F^E$

(ב) תהא $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ מטריצה וה"ל $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ המוגדרת $Tv = Av$ (לכל $v \in \mathbb{F}^n$) האם בהכרח קיים בסיס E ל $\mathbb{F}^n$ ובסיס F ל $\mathbb{F}^m$ כך ש $A = [T]_F^E$? אם כן, מצאו/הוכיחו שקיים. אחרת, הוכיחו שלא קיים.

3. נגדיר הע"ל

$$T : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^2$$

ע"י

$$T(A) = C_1(A) + C_3(A)$$

לכל $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$. כאשר $C_i(A)$ פירושו העמודה ה i של A.
נגדיר $S = \{e_{1,1}, e_{1,2}, e_{1,3}, e_{2,1}, e_{2,2}, e_{2.3}\}$ להיות הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^{2\times 3}$
(כלומר $e_{i,j}$ היא המטריצה שיש בה 1 במקום ה־ i, j ואפסים בכל השאר.)
ו $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל$\mathbb{R}^2$. מצאו את המטריצה המייצגת $[T]_B^S$.

4. יהי $B = \{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$ בסיס ל $\mathbb{R}^3$ ו $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ הבסיס הסטנדרטי. תהי $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ המקיימת:

$$[T]_B^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(א) מצאו את $[T]_S^S$.

(ב) חשבו את $T\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

בהצלחה!