פתרון תרגיל 8 לינארית 2 מדמ"ח

1. נציג את T בעזרת מטריצה לפי הבסיס הסטנדרטי

$$B = \left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}:$$

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1$$

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_2$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + e_3$$

$$T(e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e_2 + e_4$$

$$\Leftarrow \quad [T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

על מנת למצוא את הע"ע של [T] נחשב את הפולינום האופייני

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^4$$

לכן יש רק ע"ע אחד $\lambda = 1$. נציב אותו ונחפש את

המרחב העצמי , נקבל

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} z = 0 \\ w = 0 \end{matrix}$$

לכן

$$V_1 = span\left\{ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B, \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]_B \right\} = span\left\{ e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן הריבוי

הגאומטרי של הערך העצמי 1 הוא 2 וממש קטן מהריבוי האלגברי לכן ההעתקה לא לכסינה (אין מספיק ו"ע ליצירת בסיס עצמי שילכסן אותה).

2. א. נחפש פולינום אופייני

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & a-2\\ 1 & 1-\lambda & a-2\\ 0 & 0 & a-\lambda\end{vmatrix} = (a-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 0\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (a-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda).$$

אם $a \neq 1,2$ אזי יש לנו 3 ע"ע שונים ולכן המטריצה לכסינה.

אם $a=1$ אזי הריבוי האלגברי של ע"ע 1 הוא 2. נמצא את הריבוי הגאומטרי:

$\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x=z$ לכן $V_1 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ הריבוי הגאומטרי גם הוא 2

ולכן המטריצה לכסינה (כי לכל ע"ע הריבוי האלגברי שווה לגאומטרי).

אם $a=2$ אזי הריבוי האלגברי של ע"ע 2 הוא 2. נמצא את הריבוי הגאומטרי:

$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow x=y$ לכן $V_2 = span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ הריבוי הגאומטרי גם הוא

2 ולכן המטריצה לכסינה (כי לכל ע"ע הריבוי האלגברי שווה לגאומטרי).

ב. אם $a \neq 1,2$ אזי עבור ע"ע a נקבל שהו"ע הם $span\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. עבור ע"ע 1 הו"ע הם

$span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ועבור ע"ע 2 הו"ע הם $span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. לכן המטריצה המלכסנת יכולה

להיות $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ והאלכסונית $D=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

אם $a=1$, עבור ע"ע 2 הו"ע הם $span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ ולכן $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ והאלכסונית

$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

אם $a=2$ אזי עבור ע"ע 1 הו"ע הם $span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ לכן $P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

והאלכסונית $D=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. נחשב את הפולינום האופייני של A ונקבל: $f_A(t)=-t^3+t+1$.

לפי משפט קיילי-המילטון מתקיים: $(*)\quad f_A(A)=0 \Rightarrow A^3-A-I=0$.

מכאן מראים כי A הפיכה ומתקיים: $A(A^2-I)=I \Rightarrow A^{-1}=A^2-I$.

ולכן, יוצא: $A^{-2}=(A^{-1})^2=(A^2-I)^2=A^4-2A^2+I$.

אם נכפול את (*) ב-A נקבל: $(**)\quad A^4-A^2-A=0 \Rightarrow A^4=A^2+A$. נציב זאת בביטוי ל-

A^{-2} ונקבל: $A^{-2}=A^4-2A^2+I=A^2+A-2A^2+I=A-A^2+I=\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

כעת, מ(*) נובע: $A^3=A+I \Rightarrow A^{12}=(A+I)^4=A^4+4A^3+6A^2+4A+I$.

אם נציב את (**) לתוך השוויון האחרון, נקבל: $A^{12}=4A^3+7A^2+5A+I$.

ושוב, אם נציב את (*) לתוך התוצאה האחרונה, נקבל:

$$A^{12}=7A^2+9A+5I=\begin{pmatrix}12&9&7\\16&12&9\\9&7&5\end{pmatrix}.$$

4.

תהי $A\in F^{n\times n}$ מטריצה לכסינה בעלת פולינום אופייני $f_A(t)$. הוכיחו כי $f_A(A)=0$ ללא שימוש במשפט קיילי-המילטון.

A לכסינה ולכן קיימת P מטריצה הפיכה ו D אלכסונית כך ש: $A=PDP^{-1}$.

A ו D דומות ולכן יש להן אותו פ"א (הוכחנו בתרגיל): .

$f_A(x)=f_D(x)=(x-\lambda_1)^{k_1}\cdots(x-\lambda_n)^{k_n}$. כאשר כמובן ש λ_i הם הע"ע של A שמופיעים על האלכסון של D.

נציב את $A=PDP^{-1}$ בפולינום האפייני :

$$f_A(A)=f_A(PDP^{-1})=(PDP^{-1}-\lambda_1 I)^{k_1}\cdots(PDP^{-1}-\lambda_n I)^{k_n}=$$

$$=(PDP^{-1}-P\lambda_1 P^{-1})^{k_1}\cdots(PDP^{-1}-P\lambda_n P^{-1})^{k_n}=(PDP^{-1}-P\lambda_1 P^{-1})^{k_1}\cdots(PDP^{-1}-P\lambda_n P^{-1})^{k_n}=$$

$$=(P(D-\lambda_1 I)P^{-1})^{k_1}\cdots(P(D-\lambda_n I)P^{-1})^{k_n}=$$

$$=\underbrace{(P(D-\lambda_1 I)P^{-1})\cdots(P(D-\lambda_1 I)P^{-1})}_{k_1}\cdots\underbrace{(P(D-\lambda_n I)P^{-1})\cdots(P(D-\lambda_n I)P^{-1})}_{k_n}=$$

$$=(P(D-\lambda_1 I)^{k_1}P^{-1})\cdots(P(D-\lambda_n I)^{k_n}P^{-1})=P(D-\lambda_1 I)^{k_1}\cdots(D-\lambda_n I)^{k_n}P^{-1}=$$

$$P\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&\lambda_2^{k_1}&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&\lambda_n^{k_1}\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\lambda_1^{k_n}&0&0&0\\0&\lambda_2^{k_n}&0&0\\0&0&\ddots&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}=$$

$$= P\begin{pmatrix} 0\cdot\lambda_1^{k_2}\cdots\lambda_1^{k_n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k_1}\cdot 0\cdots\lambda_2^{k_n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n^{k_1}\cdots\cdot\lambda_n^{k_n-1}0 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5. נתונה $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ לא הפיכה. לכן יש לה ע"ע $\lambda = 0$ בנוסף נתון, כי:
$\rho(A-I)=4$, $\rho(A-3I)=7$ (האות ρ מסמנת את הדרגה של המטריצה).
נבין את משמעות הנתונים:
לפי הגדרה, λ הוא ע"ע של $A_{n\times n}$ אמ"ם $|A-\lambda I|=0$, כלומר $\rho(A-\lambda I)<n$, ולכן
כיוון שאצלנו מתקיים ש $\rho(A-I)=4$, $\rho(A-3I)=7$, ז"א ש 1, 3, הם ע"ע.
לפי המשפט $rank+\{\dim sol\ \ Av=0\}=n$ (שהרי הריבוי הגיאומטרי הוא מימד מרחב הפתרונות של מע' הומוגנית)
הריבוי הגיאומטרי של ע"ע 1 הוא 6 , הריבוי הגאומטרי של ע"ע 3 הוא 3 , ולע"ע 0 יש לפחות וקטור עצמי יחיד שאינו 0 . כמובן שלא יכולים להיות יותר מ 10 ו"ע (שהרי הם בת"ל) ולכן קיבלנו יחד : 10=6+3+1 ו"ע שיוצרים בסיס ל $\mathbb{R}^{10}$ ולכן היא לכסינה.
ולכן המטריצה האלכסונית שדומה לה היא בגודל 10*10, ועל האלכסון מופיעים : 0 – פעם אחת, 1- 6 פעמים, 3 – 3 פעמים.