מבחן בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 (89-132)
פתרון מועד ב' (03.03.15)

משך המבחן הינו שלוש שעות. יש לענות על <u>כל</u> השאלות 1-5.

מותר השימוש במחשבון. כל חומר עזר פרט למחשבון – אסור.

<u>ניקוד</u>: שאלה ראשונה שווה 15 נקודות, כל סעיף בשאלות 2-5 שווה 10 נקודות. שאלת בונוס שווה 7 נקודות.

<u>שאלה 1</u>

הוכיחו את כלל השרשרת:

תהיינה f,h שתי פונקציות ממשיות ותהי $g=f\circ h$ ההרכבה שלהן (כלומר $g(t)=f(h(t))$).

אזי לכל ערך של t שעבורו הנגזרות $f'(h(t)), h'(t)$ קיימות, גם הנגזרת $g'(t)$ קיימת ומתקיים:

$g'(t)=f'(h(t))h'(t)$.

<u>פתרון</u>

נסמן $y=f(x), x=h(t)$ ולכן $y=g(t)=f(h(t))$.

יהי $\Delta t\neq 0$ אינפיניטסימל. נרצה להראות שהביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ קיים וסופי ו- $\operatorname{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)=g'(t)$.

לפי הנתון הנגזרת $h'(t)$ קיימת ולכן לפי משפט השינוי (עבור ה- Δt שבחרנו) נקבל ש- Δx המתאים הוא אינפיניטסימל.

הנגזרת $f'(x)$ קיימת לפי הנתון ולכן לפי משפט השינוי עבור ה- Δx הנ"ל מתקיים:

$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$ עבור ε אינפיניטסימלי כלשהו. מכיוון ש- $\Delta t\neq 0$ ניתן לחלק בו ולקבל:

$\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$. נזכור כי $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ הוא מוגדר וסופי (שכן $\operatorname{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=h'(t)$) ולכן $\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$ הוא אינפיניטסימל. לבסוף, הביטוי $\frac{\Delta y}{\Delta t}=f'(x)\frac{\Delta x}{\Delta t}+\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}$ מוגדר ומתקיים

$\operatorname{st}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)=f'(x)\operatorname{st}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)+\operatorname{st}\left(\varepsilon\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)=f'(x)h'(t)+0$ ולכן $g'(t)=f'(x)h'(t)$.

שאלה 2

א. מצאו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n!-10^n\right)$, במידה וקיים.

ב. הוכיחו/הפריכו: כל סדרה מונוטונית היא סדרת קושי (Cauchy).

פתרון

א. מתקיים $10^n\left(\frac{n!}{10^n}-1\right)=10^n\left(\frac{n!-10^n}{10^n}\right)=n!-10^n$. ראינו בהרצאה כי

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{10^n}=\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty}10^n=\infty$ ולכן $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n!-10^n\right)=\infty$.

ב. הפרכה: הסדרה המוגדרת על-ידי האיבר הכללי $a_n=n$ היא מונוטונית עולה, אך אינה סדרת קושי שכן אינה מתכנסת.

שאלה 3

א. נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}4 & x\le 1\\ 4x & x>1\end{cases}$. האם היא רציפה? האם היא גזירה?

הוכיחו את תשובתכם!

ב. מצאו את שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $x=3y^3+2y$ בנקודה $\left(x,y\right)=\left(5,1\right)$ (ניתן להניח שהפונקציה הפיכה).

פתרון

א. ברור שלכל $x\ne 1$ הפונקציה רציפה ב-x. נבדוק את $x=1$.

מתקיים:

$$\lim_{x\to 1^+}f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^+}4x=4=f\left(1\right)$$

$$\lim_{x\to 1^-}f\left(x\right)=\lim_{x\to 1^-}4=4=f\left(1\right)$$

ולכן f רציפה ב-$x=1$.

נבדוק גזירות.

ברור שהפונקציה גזירה ב-$\left(-\infty,1\right)\cup\left(1,\infty\right)$. נבדוק גזירות בנקודה $x=1$.

יהי $\Delta x\ne 0$ אינפיניטסימל. נרצה לחשב את הביטוי הבא (במידה וקיים):

$$\text{st}\left(\frac{f\left(1+\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}\right).$$

נחלק לשני מקרים:

1. $\Delta x>0$. נקבל: $\text{st}\left(\frac{4\left(1+\Delta x\right)-4}{\Delta x}\right)=\text{st}\left(\frac{4\Delta x}{\Delta x}\right)=4$.

2. $\Delta x<0$. נקבל: $\text{st}\left(\frac{4-4}{\Delta x}\right)=\text{st}\left(\frac{0}{\Delta x}\right)=0$.

לביטוי $\text{st}\left(\frac{f\left(1+\Delta x\right)-f\left(1\right)}{\Delta x}\right)$ יש ערכים שונים עבור $\Delta x\approx 0$ שונים ולכן הפונקציה אינה גזירה ב-$x=1$.

ב. אנו מעוניינים לחשב את $\frac{dy}{dx}$ בנקודה $\left(5,1\right)$. נגזור לשם כך את שני הצדדים של המשוואה לפי x ונקבל: $1=9y^2\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}$. לכן $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{9y^2+2}$ והשיפוע הוא $\frac{1}{11}$.

<u>שאלה 4</u>

קבעו לגבי כל טור האם הוא מתכנס בתנאי, מתכנס בהחלט או מתבדר:

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$.

<u>**פתרון**</u>

נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר, נבדוק האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ מתכנס.

ניעזר במבחן המנה:

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{\left(n+1\right)!}}{\frac{2^n}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot 2\cdot n!}{n!\left(n+1\right)2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1}=0<1$. לפי מבחן המנה טור הערכים המוחלטים מתכנס, ולכן הטור המקורי <u>מתכנס בהחלט</u>.

ב. $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\ln\left(\ln n\right)}$.

<u>**פתרון**</u>

נבדוק התכנסות בהחלט, כלומר נבדוק את התכנסות הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(\ln n\right)}$.

ניעזר במבחן ההשוואה. מכיוון שמתקיים $\ln n<n$ מקבלים $\ln\left(\ln n\right)<\ln n<n$ ולכן $\frac{1}{\ln\left(\ln n\right)}>\frac{1}{n}$. הטור $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר ולכן גם הטור $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\ln\left(\ln n\right)}$ מתבדר.

נבדוק התכנסות בתנאי.

הסדרה $a_n=\dfrac{1}{\ln(\ln n)}$ היא יורדת ושואפת לאפס, ולכן מתקיימים תנאי משפט לייבניץ. לכן הטור מתכנס.

לסיכום: הטור המקורי <u>מתכנס בתנאי</u>.

ג. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}$.

<u>פתרון</u>

ניעזר במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\left(2(n+1)\right)!}{(n+1)!(n+2)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!(n+1)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)!\,n!(n+1)!}{(n+1)!(n+2)!(2n)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(2n+1)}{n+2}=4>1$$

לכן, לפי מבחן המנה, <u>הטור מתבדר</u>.

<u>שאלה 5</u>

א. תהי f פונקציה גזירה בנקודה x_0. הוכיחו שהגבול הבא קיים:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}.$$

<u>פתרון</u>

נשים לב שמכיוון שהפונקציה גזירה בנקודה x_0, הגבולות

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},\ \ \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$$

קיימים ושניהם שווים ל- $f'(x_0)$.

כעת,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_0-h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right)$$

הגבולות של שני הביטויים שבסוגריים קיימים ולכן הגבול כולו קיים (ושווה ל- $2f'(x_0)$).

ב. תהי $f:[0,1]\to[0,1]$ פונקציה רציפה. הוכיחו שקיימת נקודה $x_0\in[0,1]$ כך ש- $f(x_0)=2\sin x_0$.

<u>פתרון</u>

ניעזר במשפט ערך הביניים. נגדיר פונקציה חדשה $h(x)=f(x)-2\sin x$ ונראה שקיימת נקודה בה h מתאפסת. נשים לב כי זוהי פונקציה רציפה על הקטע $[0,1]$ כהפרש של שתי פונקציות רציפות.

מתקיים $h(0)=f(0)-2\sin 0=f(0)$, ומכיוון ש-$f(0)\in[0,1]$ נקבל כי $h(0)\geq 0$.

כמו כן $h\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-2\cdot\frac{1}{2}=f\left(\frac{\pi}{6}\right)-1$. מכיוון ש-$f\left(\frac{\pi}{6}\right)\in[0,1]$ מתקיים $f\left(\frac{\pi}{6}\right)-1\leq 0$ ולכן $h\left(\frac{\pi}{6}\right)\leq 0$.

[שימו לב שהנקודה $x=\frac{\pi}{6}$ אכן נמצאת בקטע $[0,1]$ שכן $\frac{\pi}{6}\sim 0.52$.]

לכן, לפי משפט ערך הביניים עבור $h(x)$ בקטע $[0,1]$, נקבל כי קיימת נקודה $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ עבורה $h(x_0)=0$ וזה מוכיח הדרוש.

<u>שאלה בונוס</u>

תהיינה f,g שתי פונקציות גזירות על קטע (a,b) ונניח ש-$f(x)\leq g(x)$ לכל $x\in(a,b)$. נניח בנוסף שקיימת נקודה $x_0\in(a,b)$ עבורה מתקיים $f(x_0)=g(x_0)$. הוכיחו כי $f'(x_0)=g'(x_0)$.

<u>פתרון</u>

נגדיר פונקציה חדשה $h(x)=g(x)-f(x)$. זוהי פונקציה רציפה וגזירה על הקטע הפתוח (a,b). מתקיים $h(x_0)=0$ וכן לכל $x\in(a,b)$ כך ש- $x\neq x_0$ מתקיים $h(x)\geq 0$. לכן בנקודה x_0 יש ל-h נקודת מינימום.

x_0 היא לא נקודת קצה, בנוסף h גזירה בקטע הנתון ולכן, לפי משפט הנקודה הקריטית, נקבל $h'(x_0)=0$. מכאן $g'(x_0)=f'(x_0)$.

בהצלחה בהמשך השנה!