שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית ואנליטית (88-201)
שם המרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר ב', מועד א' : 20.07.15

יש לנמק ולהצדיק את כל התשובות.

משך הבחינה: שלוש שעות. כל אחת מ-6 שאלות שווה 18 נקודות.

1. יהי $M \subset \mathbb{R}^3$ משטח מוגדר על ידי גרף של $z = f(x,y)$ כאשר $f(x,y) = 3x^2 + 8xy - 3y^2$. יהי (e_1, e_2, e_3) הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^3$.
   א. מצא מטריצת Hessian H_f של f בראשית הצירים.
   ב. יהיו λ_i (כאשר $i = 1,2$) ערכים עצמיים של H_f. יהי v_i וקטור עצמי במישור (x,y) השייך לערך עצמי λ_i. נגדיר מישור $P_i \subset \mathbb{R}^3$ ($i = 1,2$) הנפרש על ידי e_3 וגם הווקטור העצמי v_i. נגדיר עקומה $\gamma_i \subset \mathbb{R}^3$ על ידי $\gamma_i = M \cap P_i$. מצא את העקמומיות של כל אחת מן העקומות γ_i בראשית הצירים.
   ג. חשב את העתקת Weingarten של M בראשית הצירים ואת עקמומיות Gauss של M בראשית הצירים.
   ד. חשב את עקמומיות ממוצעת של משטח M בראשית הצירים .

2. מקדמים Γ_{ij}^{ℓ} , L_{ij} , וכו', ולפשט ככל האפשר את הביטויים הבאים:
   א. לבטא באמצעות Γ_{ij}^{ℓ} ו- L_{ij} בלבד: $\delta^k{}_m \left\langle x_{ab}, n_k \right\rangle$.
   ב. $\left\langle x_j, x_{pq} \right\rangle g^{jp}$.
   ג. $\left\langle x_{pqr}, n \right\rangle$.
   ד. $|x_{ij}|^2$.

3. נתונה תבנית ריבועית $Q(x,y) = -3x^2 + 4xy - 6y^2$
   א. עקומה מישורית מוגדרת ע"י המשוואה $Q(x,y) = -1$. מהי צורת העקומה?
   ב. מהי העקמומיות הכוללת של עקומה זו?
   ג. מהי צורת המשטח המתקבל כגרף של התבנית הריבועית $z = Q(x,y)$?
   ד. חשב את עקמומיות גאוס של הגרף בנקודה $(0,0,0)$.

4. מצאו את **הקווים** הגיאודזים של משטח בעל המטריקה $G(u,v) = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix}$. **שימו לב** שיש למצוא את הקווים עצמם, ולא רק את המשוואות. **רמז:** כדאי להשתמש בכך שהתנועה על הקווים היא במהירות קבועה, כלומר במשוואה $\|\beta'\|^2 = c$.

5. נתון טורוס המתקבל כמשטח סיבוב של המעגל $\left(x-a\right)^2+z^2=b^2$ במישור xz סביב ציר ה- z $\left(a>b\right)$

א. מצאו פרמטריזציה של הטורוס.
ב. חשבו את התבנית היסודית הראשונה של הטורוס.
ג. חשבו את סמלי גמא של הטורוס.

6. יהי $\rho\in\mathbb{R}$. נתונה המטריקה

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{\rho}{4}\left(x^2+y^2\right)\right)^2} \end{pmatrix}$$

חשבו את עקמומיות גאוס של משטח בעל מטריקה זו.

בהצלחה!