

1 קומבי

$$\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = 2^{2n+1}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$$

בצד ימין יש את כל תתי הקבוצות של $[2n]$. חלקן קטנות חלקן גדולות. בצד שמאל יש את כלל תתי הקבוצות הקטנות של $[2n+1]$. אנחנו רוצים להתאים ביניהן. בהינתן תת קבוצה קטנה מצד ימין נוכל לשלוח אותה ל... בהינתן תת קבוצה גדולה בצד ימין נוכל לשלוח אותה ל...

$$f(X) = \begin{cases} * & |X| \leq n \\ ** & |X| > n \end{cases}$$

אנחנו רוצים לחשב $\bigcup_{i=1}^n A_i$ כאשר A_i זה קבוצת הסידורים כך שבתא ה- i אין כדור. האיחוד הזה הוא קבוצת הסידורים הפסולים. בסוף נחסר את זה מקבוצת הסידורים הכללית, ונקבל את קבוצת הסידורים הכשרה.

כמה סידורים אפשריים יש כאשר בתא ה- i אין כדור? מבחינת צבעוניים: $(2n-1)^n$. מבחינת שקופים: בחירה של n מתוך $2n-1$ עם חזרה בלי סדר ולכן $\binom{n+2n-1-1}{n}$. ביחד:

$$\binom{3n-2}{n} \cdot (2n-1)^n$$

כמה סידורים אפשריים יש כאשר ישנם k תאים (מתוך n הראשונים) ללא כדור? מבחינת צבעוניים: בחירה של n תאים מתוך $2n-k$ עם חזרה וסדר ולכן $(2n-k)^n$. מבחינת שקופים: בחירה של n מתוך $2n-k$ עם חזרה ללא סדר ולכן $\binom{n+2n-k-1}{n}$ וביחד:

$$\binom{3n-k-1}{n} \cdot (2n-k)^n$$

ולכן נקבל:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \binom{n}{1} \cdot \binom{3n-1-1}{n} \cdot (2n-1)^n - \binom{n}{2} \cdot \binom{3n-2-1}{n} \cdot (2n-2)^n + \binom{n}{3} \cdot \binom{3n-3-1}{n} \cdot (2n-3)^n$$

$$-\binom{n}{4}\binom{3n-4-1}{n} \cdot (2n-4)^n + \dots - \dots (-1)^{n+1}\binom{n}{n}\binom{3n-n-1}{n} \cdot (2n-n)^n$$

בסה"כ:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \binom{3n-k-1}{n} \cdot (2n-k)^n$$

ואנחנו מחפשים את הכל פחות האיחוד שזה:

נחשב את הכל: צבעוניים: בחירה של n מתוך $2n$ עם חזרה וסדר ולכן $(2n)^n$. שקופים: בחירה של n מתוך $2n$ עם חזרה וללא סדר ולכן $\binom{n+2n-1}{n}$. ביחד:

$$\binom{3n-1}{n} \cdot (2n)^n$$

ולכן התשובה היא:

$$\binom{3n-1}{n} \cdot (2n)^n - \left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \binom{3n-1}{n} \cdot (2n)^n - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \cdot \binom{3n-k-1}{n} \cdot (2n-k)^n =$$

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \cdot \binom{3n-k-1}{n} \cdot (2n-k)^n$$

2 ליני

תרגיל 8 שאלה אחרונה: צריך להוכיח שכל שני פתרונות הם פרופורציונאליים. באלגברית: לכל שני פתר u, v קיים a כך ש- $v = au$ אם ורק אם u, v ת"ל. נתון $rank(A) = m - 1$. לפי משפט הדרגה: $m = rank(A) + \dim N(A)$, ואז מקבלים ש- $\dim N(A) = 1$ כלומר יש $v \neq 0$ כך ש- $N(A) = span\{v\}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & & 3 & \\ & 1 & 2 & \\ & & & 1 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

השלמת תרגילים על דרגה:

1. תהיינה $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ המקיימות: $rank(A) + rank(B) > n$. הוכיחו: $AB \neq 0$. פתרון: טענת עזר: $AB = 0 \iff C(B) \subset N(A)$. תרגיל הכנה למבחן. כפל עמודה:

$$C_i(AB) = A \cdot C_i(B)$$

ונשים לב: $AC_i(B) = 0 \iff C_i(B) \in N(A)$ ואידך זיל גמור.
 נחזור לתרגיל: נב"ש $AB = 0$, נקבל מטענת העזר $C(B) \subset N(A)$, לכן $rank(B) = \dim C(B) \leq \dim N(A)$. כעת, לפי משפט הדרגה:

$$n = rank(A) + \dim N(A) \geq rank(A) + rank(B) > n$$

בסתירה.

2. תהא $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & * \\ 1 & * & 1 \\ * & 1 & 1 \end{pmatrix}$, כך שקיימים 2 פתרונות בת"ל למערכת $Ax = 0$. מצאו את A .

דומה לשיעורי הבית. מהנתון על 2 פתרונות בת"ל נובע $\dim N(A) \geq 2$. אם $\dim N(A) = 3$ אז ממשפט הדרגה $3 = rank(A) + \dim N(A)$, ולכן נקבל $rank(A) = 0$ ולכן $A = 0$. לכן $\dim N(A) = 2$ ולכן $rank(A) = 1$.

ממ"פ: יש לנו מ"ו V , ואנחנו מגדירים פונקציה

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^2 \rightarrow \mathbb{F}$$

המקיימת:

- לנאריות ברכיב הראשון: $\langle v + \alpha u, w \rangle = \langle v, w \rangle + \alpha \langle u, w \rangle$
- הרמיטיות (סימטריות מעל $\mathbb{R}$)
- אי שליליות.