

תרגיל 4 בפונקציות מרוכבות

שאלות להגשה

1. מצאו פונקציה $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ שגזירה אך ורק בנקודות $(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)$.
רמז: אם $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ אפשר לנסות לחפש u, v מהצורה

$$u(x, y) = u_1(x) + u_2(y), \quad v(x, y) = v_1(x) + v_2(y)$$

פתרון: אם משוואות קושי ייצאו לנו

$$x^2 + y^2 = 2 \quad x^2 = y^2$$

אז קל לראות שהנקודות שבהן הפונקציה גזירה הן רק הנקודות הרצויות. צריך למצוא פונקציה שאלו משוואות קושי יימנעו שלה. נכתוב את המשוואות בתור

$$x^2 = 2 - y^2 \quad x^2 = y^2$$

נחליט ש $u_x = x^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}x^3 + C(y)$ כאשר $C(y)$ היא פונקציה שתלויה רק ב y . כמו כן נחליט ש $u_y = y^2$ ולכן $u = \frac{1}{3}y^3 + C(x)$ כלומר בינתיים נראה שאפשר לקחת

$$u(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2$$

בהתאמה נקבל לפי משוואות קושי רימן

$$v_y = 2 - y^2 \quad v_x = -x^2$$

ולכן

$$v(x, y) = 2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3$$

כלומר הפונקציה

$$f(x, y) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}y^2 + i(2y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{3}x^3)$$

מתאימה לדרישות.

2. נניח כי $f(z)$ גזירה בעיגול $\{z \mid |z| < R\}$ הוכיחו כי גם $\overline{f(\bar{z})}$ גזירה שם.
פתרון: ראשית נשים לב ש $\overline{f(\bar{z})}$ מוגדרת בתחום המדובר כי $z \in \{z \mid |z| < R\} \Leftrightarrow \bar{z} \in \{\bar{z} \mid |\bar{z}| < R\}$ אם נכתוב

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\overline{f(\bar{z})} = U(x, y) + iV(x, y)$$

אז בעצם

$$U(x, y) = u(x, -y) \quad V(x, y) = -v(x, -y)$$

ולכן U, V בוודאי דיפרנציאביליות כנדרש ובנוסף

$$U_x(x, y) = u_x(x, -y) = v_y(x, -y) = V_y(x, y)$$

$$U_y(x, y) = -u_y(x, -y) = v_x(x, -y) = -V_x(x, y)$$

כלומר משוואות קושי רימן מתקיימות כנדרש.

3. עבור הפונקציות $u(x, y)$ הבאות, מצאו $v(x, y)$ כך שהפונקציה

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

תהיה גזירה בתחום הנתון. בטאו את f לפי z (יוצא משהו פשוט).

$$u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y \quad \text{בכל } \mathbb{C}.$$

פתרון: נמצא את v לפי משוואות קושי רימן

$$u_x(x, y) = (e^x + xe^x) \cos y - e^x y \sin y = v_y$$

ולכן

$$v(x, y) = \int (e^x + xe^x) \cos y - e^x y \sin y dy$$

נזכור ש

$$\int y \sin y dy = -y \cos y + \int \cos y dy = -y \cos y + \sin y$$

ולכן

$$v(x, y) = (e^x + xe^x) \sin y + e^x (y \cos y - \sin y) + C(x) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + C(x)$$

לפי משוואות קושי רימן השנייה,

$$v_x(x, y) = (e^x + xe^x) \sin y + e^x y \cos y + C'(x) = xe^x \sin y + e^x \sin y + e^x y \cos y = -u_y(x, y)$$

כלומר

$$C'(x) = 0$$

ולכן $C(x)$ קבוע. כלומר

$$v(x, y) = xe^x \sin y + e^x y \cos y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כמו כן קל לראות ש u, v שקיבלנו מקיימות את משוואות קושי רימן ולכן f שקיבלנו באמת גזירה. נשים לב ש

$$\begin{aligned} f(z) &= xe^x \cos y - ye^x \sin y + i(xe^x \sin y + e^x y \cos y + D) \\ &= xe^x (\cos y + i \sin y) - ye^x (\sin y - i \cos y) + iD \\ &= xe^x e^{iy} + iye^x (\cos y + i \sin y) + iD \\ &= xe^{x+iy} + iye^{x+iy} + iD = ze^z + iD \end{aligned}$$

(ב) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2} + x$ ב $\mathbb{C} \setminus \{0\}$
פתרון: כמו בסעיף הקודם

$$u_y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = -v_x$$

כלומר

$$v_x = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

ולכן

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + C(y)$$

לפי משוואת קושי רימן השניה

$$u_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + C'(y)$$

ולכן

$$C(y) = y + D \quad D \in \mathbb{R}$$

כלומר

$$v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2} + y + D$$

וקל לוודא שמשוואות קושי רימן מתקיימות. כמו כן,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{x}{x^2+y^2} + x + i\left(-\frac{y}{x^2+y^2} + y + D\right) \\ &= \frac{x-iy}{x^2+y^2} + x + iy + iD = \frac{\bar{z}}{|z|^2} + z + iD \\ &= z + \frac{1}{z} + iD \end{aligned}$$

4. הוכיחו כי

(א) לכל z מתקיים $|e^z| \leq e^{|z|}$
פתרון: אם $z = x + iy$ אז

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x| = e^x$$

$$e^{|z|} = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

היות ש $x \leq \sqrt{x^2+y^2}$ בוודאי ש

$$e^x \leq e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

(ב) מתקיים שוויון אם ורק אם z ממשי אי שלילי.
פתרון: אם z ממשי אי שלילי ברור שמתקיים שוויון. אם מתקיים שוויון אז

$$e^x = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

כלומר

$$x = \sqrt{x^2+y^2}$$

וזה וודאי מכריח $0 \leq x$ ו $y = 0$.

5. מצאו את כל הנקודות בהן $\cos \bar{z}$ גזירה.
פתרון:

$$\cos \bar{z} = \frac{e^{i(x-iy)} + e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^y + e^{-ix}e^{-y}}{2}$$

ברור שה $\frac{1}{2}$ לא משפיע אז נתעלם ממנו לנוחות. יש לנו

$$(\cos x + i \sin x)e^y + e^{-y}(\cos x - i \sin x)$$

כלומר

$$u(x, y) = \cos x(e^y + e^{-y}) \quad v(x, y) = \sin x(e^y - e^{-y})$$

ברור שהכל דיפרנציאבילי

$$u_x = -\sin x(e^y + e^{-y})$$

$$u_y = \cos x(e^y - e^{-y})$$

$$v_x = \cos x(e^y - e^{-y})$$

$$v_y = \sin x(e^y + e^{-y})$$

כלומר משוואות קושי רימן הן

$$-\sin x(e^y + e^{-y}) = \sin x(e^y + e^{-y})$$

$$\cos x(e^y - e^{-y}) = -\cos x(e^y - e^{-y})$$

היות ש $e^y + e^{-y} > 0$ המשוואה הראשונה מכריחה ש $\sin x = 0$ כלומר ש $x = \pi k$ לכן $\cos x \neq 0$ והמשוואה השנייה אומרת ש

$$e^y - e^{-y} = 0$$

שזה בקלות מכריח $y = 0$. לכן הנקודות היחידות שבהן הפונקציה גזירה הן

$$\{(\pi k, 0) \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

6. מצאו נוסחא רב ערכית עבור $\arctan z$. (כלומר, בהינתן $w = \tan z$ בטאו את z באמצעות w , מותר להשתמש בפונקציות רב ערכיות).
פתרון: נניח $\tan w = z$, כלומר

$$\frac{\sin w}{\cos w} = z$$

$$\frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = z$$

$$e^{iw} - e^{-iw} = i z e^{iw} + i z e^{-iw}$$

$$e^{2iw} - 1 = i z e^{2iw} + i z$$

$$e^{2iw}(1 - iz) = iz + 1$$

$$e^{2iw} = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$2iw = \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

$$w = \arctan z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

7. יהי Log הענף העיקרי של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C} \setminus \{-t \mid t \geq 0\}$.

(א) הראו כי לכל z בתחום ההגדרה של Log מתקיים

$$\text{Log} \frac{1}{z} = -\text{Log} z$$

פתרון: עבור הענף העיקרי של הלוגריתם

$$\operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

כאשר

$$\operatorname{Arg}(z) \in (-\pi, \pi)$$

אם נסמן

$$z = Re^{i\theta}$$

אז כמובן

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{R} e^{-i\theta}$$

ולכן

$$\operatorname{Log} \frac{1}{z} = \ln \left| \frac{1}{z} \right| + i \operatorname{Arg} \left(\frac{1}{z} \right) = -\ln |z| - i\theta = -\operatorname{Log} z$$

(ב) הראו שכלל זה לא בהכרח נכון עבור ענפים אחרים של הלוגריתם.
פתרון: אם נבחר ענף שעבורו הזוית היא בין $(0, 2\pi)$ וניקח $z = i$ אז

$$\log \frac{1}{z} = \log(-i) = \frac{3\pi i}{2}$$

ו

$$-\log z = -\log i = -i\frac{\pi}{2}$$

כך שאין שוויון.

תרגילים לא להגשה. מומלץ לעשות וזה יכול להיות גם הכנה טובה לבוחן.

1. מצאו את כל הנקודות שבהן הפונקציות הבאות גזירות/אנליטיות:

$$(א) f(z) = x^3 + iy^3$$

פתרון: נשתמש במשוואות קושי רימן כאשר $u(x, y) = x^3$ ו $v(x, y) = y^3$.
ברור שהן דיפרנציאביליות.

$$u_x = 3x^2 \quad u_y = 0$$

$$v_x = 0 \quad v_y = 3y^2$$

המשוואות יתקיימו כאשר

$$3x^2 = 3y^2$$

כלומר לאורך הישר $x = y$ והישר $x = -y$. זו קבוצה בלי נקודות פנימיות ולכן בכל נקודה f אינה אנליטית.

$$f(z) = z + \operatorname{Re}(z) \quad (\text{ב})$$

פתרון: כבר ראינו ש $\operatorname{Re}(z)$ אינה גזירה באף נקודה. אם $f(x)$ גזירה ב z_0 זה יגרור ש $\operatorname{Re}(z) = f(z) - z$ תהיה גזירה באותה נקודה. סתירה. לכן פונקציה זו לא גזירה באף נקודה.

$$f(z) = x^3 + y^5 \quad (\text{ג})$$

פתרון: משוואת קושי רימן ייתנו לנו ש

$$u_x = 3x^2 = 0 = v_y$$

$$-u_y = -y^4 = 0 = v_x$$

ולכן הפונקציה גזירה רק ב $(0, 0)$ וודאי שהיא אינה אנליטית (בכל נקודה).

2. מצאו את כל הנקודות $z \in \mathbb{C}$ שבהן $f(z) = \bar{z}e^{-17z^2}$ גזירה.

פתרון: נניח ש $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 כלשהיא. נשים לב שהפונקציה e^{17z^2} גזירה בכל נקודה ולכן גם ב z_0 ולכן הפונקציה $\bar{z} \cdot e^{17z^2} = f(z)$ גזירה גם כן ב z_0 , אבל ידוע ש $\bar{z}$ אינה גזירה באף נקודה. לכן גם $f(z)$ אינה גזירה באף נקודה.

3. תהי $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות ונגדיר $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ לפי

$$f(z) = u(x+y) - iu(x-y)$$

הוכיחו כי f גזירה על הציר הממשי (ציר x)

פתרון: נסמן $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ כלומר

$$U(x, y) = u(x+y), \quad V(x, y) = -u(x-y)$$

היות ש u גזירה ברציפות, נקבל שהנגזרות U_x, U_y, V_x, V_y קיימות ורציפות ולכן U, V דיפרנציאביליות בכל נקודה ובפרט על הציר הממשי. נותר לבדוק את קיום משוואות קושי רימן

$$U_x(x, y) = u'(x+y), \quad U_y(x, y) = u'(x+y)$$

$$V_x(x, y) = -u'(x-y) \quad V_y(x, y) = u'(x-y)$$

לכן

$$U_x(x, 0) = u'(x) = V_y(x, 0), \quad U_y(x, 0) = u'(x) = -V_x(x, 0)$$

כנדרש ולכן f גזירה על ציר x .

4. תהי $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ פונקציה הגזירה בכל נקודה ב $\mathbb{C}$ המקיימת כי בכל נקודה

$$u^2 - v^2 = c$$

כאשר c קבוע כלשהוא, הוכיחו כי f קבועה.

רמז: הגדירו $g(z) = (f(z))^2$
פתרון: אם נסמן

$$g(z) = (f(z))^2 = u^2 - v^2 + 2iuv$$

היות ש $\operatorname{Re}(g)$ היא פונקציה קבועה, ו $g(z)$ גזירה, נקבל ש $g(z)$ קבועה. כלומר $(f(z))^2 = D$ קבוע. אם במקרה $D = 0$ סיימנו. אם לא, נסמן את שני השורשים של D בתור d_1, d_2 , זה מחייב שלכל ערך z

$$f(z) \in \{d_1, d_2\}$$

נותר להוכיח ש f שווה רק לאד משני הערכים האלה. נזכור ש $f(z)$ גזירה ולכן בוודאי רציפה. נניח בשלילה שקיימים z_1, z_2 כך ש $f(z_i) = d_i$. נבחר מסילה $\gamma(t)$ כלשהיא בין z_1 ל z_2 . לפי משפט ערך הביניים תמונתה תחת f היא מסילה בין d_1, d_2 אבל מצד שני $f(\gamma(t)) \subseteq \{d_1, d_2\}$ בסתירה. ולכן לכל z מתקיים $f(z) = d_1$ או $f(z) = d_2$ כלומר f קבועה כנדרש.

5. תהיינה שתי פונקציות

$$f_1(x, y) = u(x, y) + iv_1(x, y)$$

$$f_2(x, y) = u(x, y) + iv_2(x, y)$$

המוגדרות וגזירות בתחום D . הוכיחו כי $v_1 - v_2$ הוא מספר קבוע.
פתרון: נסתכל על הפונקציה $f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$. זאת פונקציה גזירה בתור מכפלת גזירות אבל יש לה רק חלק מדומה וכפי שראינו בתרגול זה אומר ש $f_1 - f_2$ קבועה (רואים מייד ממשוואות קושי רימן שכל הנגזרות החלקיות קבועות) ולכן $v_1 - v_2$ הוא מספר קבוע.

6. הביאו את המספרים הבאים לצורה קרטזית

$$\sin(i) \quad (\text{א})$$

פתרון: לפי נוסחא

$$\sin i = i \sinh(1) = i \frac{e - e^{-1}}{2}$$

$$\cos(-i) \quad (\text{ב})$$

פתרון: שוב לפי נוסחא

$$\cos(-i) = \cos i = \cosh 1 = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

$$\tan(1+i) \quad (\text{ג})$$

פתרון: נסמן $z = 1 + i$ ואז

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{\sin z \cos \bar{z}}{\cos z \cos \bar{z}} = \frac{\sin(z + \bar{z}) + \sin(z - \bar{z})}{\cos(z + \bar{z}) + \cos(z - \bar{z})}$$

במקרה שלנו זה יוצא

$$\frac{\sin(2) + \sin(2i)}{\cos(2) + \cos(2i)} = \frac{\sin(2)}{\cos(2) + \cosh(2)} + i \frac{\sinh(2)}{\cos(2) + \cosh(2)}$$

7. מצאו את כל הערכים האפשריים של הביטויים הבאים:

$$(1+i)^{2i} \quad (\text{א})$$

פתרון:

$$(1+i)^{2i} = e^{2i \log(1+i)} = e^{2i(\ln \sqrt{2} + i(\frac{\pi}{4} + 2\pi k))} = e^{i \ln 2} e^{-(\frac{\pi}{4} + 4\pi k)}$$

$$(-i)^{-i} \quad (\text{ב})$$

פתרון:

$$(-i)^{(-i)} = e^{-i(\ln|-i|) + i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-\frac{\pi}{2} + 2\pi k}$$

$$\operatorname{Im}((1-i)^{1+i}) \quad (\text{ג})$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}((1-i)^{1+i}) &= \operatorname{Im}(e^{(1+i)(\ln \sqrt{2} + i(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k))}) = \\ &= \operatorname{Im}(e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k + i(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k)}) = \\ &= e^{\ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4} - 2\pi k} \sin(\ln \sqrt{2} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k) \end{aligned}$$

8. הראו שחוק החזקות $e^{zw} = (e^z)^w$ נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף העיקרי של הלוגריתם) ע"י בחירה של z, w מתאימים.

פתרון: ניקח $w = i$ ו $z = 2\pi i$ ואז

$$(e^z)^w = 1 \neq e^{-2\pi} = e^{zw}$$

9. פתרו את המשוואה $e^{e^z} = 1$.

פתרון: לפי התכונות של e אנחנו יודעים בעצם ש

$$e^z = 2\pi i k \quad k \in \mathbb{Z}$$

אם $k = 0$ כמובן שאין לזה פתרון. עבור $k > 0$ נקבל

$$2\pi i k = e^{\ln(2\pi k)} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

ולכן

$$z = \ln(2\pi k) + i\frac{\pi}{2} + 2\pi i n \quad n \in \mathbb{Z}$$

ועבור $k < 0$ נקבל בדומה

$$z = \ln(2\pi|k|) - i\frac{\pi}{2} + 2\pi i n \quad n \in \mathbb{Z}$$

אם נאחד את הפתרונות נקבל

$$z = \ln(2\pi|k|) + i\frac{\pi}{2} + \pi i n \quad k, n \in \mathbb{Z} \quad k \neq 0$$