תרגול 2 – טופולוגיה

<u>מרחבים מטריים</u>

<u>הגדרה</u>

תהי M קבוצה כלשהי ונניח שמוגדרת פונקציה $d:M\times M\to[0,\infty)$ המקיימת:

1. $\forall x,y\in M \quad x=y\Leftrightarrow d(x,y)=0$
2. $\forall x,y\in M \quad d(x,y)=d(y,x)$
3. אי שוויון המשולש: $\forall x,y,z\in M: d(x,z)\le d(x,y)+d(y,z)$

במקרה זה נאמר ש-(M,d) הוא <u>מרחב מטרי</u>, ו-d היא <u>מטריקה</u> על M. לפעמים כשברור מהי המטריקה d נאמר פשוט ש-M הוא מרחב מטרי (מ"מ בקיצור).

<u>תרגיל</u>

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. הוכיחו: f חח"ע אמ"מ הפונקציה $d(a,b)=|f(a)-f(b)|$ מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

(למעשה, רק התכונה הראשונה משפיעה על (ותלויה ב-) חח"ע.

1. $d(a,b)=0\Leftrightarrow|f(a)-f(b)|=0\Leftrightarrow f(a)-f(b)=0\Leftrightarrow f(a)=f(b)\Leftrightarrow a=b$
2. הסימטריות ברורה
3. $d(a,b)=|f(a)-f(b)|=|f(a)-f(c)+f(c)-f(b)|\le$
$|f(a)-f(c)|+|f(c)-f(b)|=d(a,c)+d(c,b)$

מש"ל

<u>דוגמה</u>

למשל, הפונקציה $d(x,y)=|x^2-y^2|$ אינה מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$ שכן $d(1,-1)=0$. עם זאת, הפונקציה $d(x,y)=|x^3-y^3|$ כן מגדירה מטריקה על $\mathbb{R}$ (לפי הטענה הקודמת).

<u>הגדרה</u>

נגדיר את המטריקה ה-פי-אדית (p-adic) באופן הבא: עבור p ראשוני מגדירים מטריקה על $\mathbb{Q}$-

$$d_p(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x\neq y\end{cases}$$
, עבור $k(x,y)=\max\{i: p^i \mid (x-y)\}$.

<u>לדוגמה</u>: $d_5(17,12)=\frac{1}{5}$.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שהמטריקה הפי-אדית היא אכן מטריקה.

<u>רמז</u>: הראו כי $k(x,z)\geq \min\{k(x,y),k(y,z)\}$ והסיקו כי מתקיים $d(x,z)\leq \max\{d(x,y),d(y,z)\}$.

<u>פתרון</u>

נוכיח רק אי שויון המשולש (שאר התכונות טריוויאליות).

גם אי שוויון המשולש טריויאלי אם $x=y$ או $y=z$ או $x=z$. לכן נדון רק במקרה ש $x\neq y, x\neq z, y\neq z$.

נניח ש- $m=\min\{k(x,y),k(y,z)\}$. מתקיים

$p^m \mid x-y,\ p^m \mid y-z \Rightarrow p^m \mid x-z \Rightarrow m\leq k(x,z)$, לכן $\min\{k(x,y),k(y,z)\}\leq k(x,z)$.

מכאן,
$$d(x,z)=\frac{1}{p^{k(x,z)}}\leq \frac{1}{p^{\min\{k(x,y),k(y,z)\}}}=\max\left\{\frac{1}{p^{k(x,y)}},\frac{1}{p^{k(y,z)}}\right\}=$$
$$=\max\{d(x,y),d(y,z)\}\leq d(x,y)+d(y,z)$$

מש"ל

<u>הגדרה</u>

יהי X מרחב ווקטורי מעל $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$ (ולמעשה, ניתן להגדיר מרחב נורמי לכל תת שדה $A\subseteq\mathbb{C}$). נגדיר פונקציה $\|\cdot\|: X\to[0,\infty)$ המקיימת:

1. $\forall v\in X: v=0 \iff \|v\|=0$
2. $\forall v\in X,\ \forall\alpha\in\mathbb{R}\ or\ \mathbb{C}:\ \|\alpha v\|=|\alpha|\,\|v\|$
3. $\forall u,v\in X: \|v+u\|\leq\|v\|+\|u\|$

פונקציה זו תיקרא <u>נורמה</u>, ו-$(X,\|\cdot\|)$ יקרא <u>מרחב נורמי</u>.

<u>שימו לב</u>: כל נורמה משרה מטריקה, שכן ניתן להגדיר $d(x,y)=\|x-y\|$.

תרגיל

יהי $X=\{(x_n):x_n\in\mathbb{R}\ ,\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}<\infty\}$ מרחב ווקטורי של סדרות חסומות.
הוכיחו כי הפונקציה $\|(x_n)\|:=\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}$ היא נורמה על מרחב זה (מרחב זה מסומן $l_\infty=(X,\|\cdot\|)$).

פתרון

א. אם $x=(x_n)$ קל לראות שמתקיים $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=\vec{0}=(0,0,0,\ldots)$.

ב. $\|(\alpha x_n)\|=\sup\{|\alpha x_n|:n\in\mathbb{N}\}=\sup\{|\alpha|\cdot|x_n|:n\in\mathbb{N}\}=$

$$=|\alpha|\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}=|\alpha|\cdot\|(x_n)\|$$

ג. צ"ל: $\|(x_n)+(y_n)\|\le\|(x_n)\|+\|(y_n)\|$. מתקיים:
$\forall m\in\mathbb{N}:|x_m+y_m|\le|x_m|+|y_m|\le\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}+\sup\{|y_n|:n\in\mathbb{N}\}$. לכן,
$\sup\{|x_n+y_n|:n\in\mathbb{N}\}\le\sup\{|x_n|:n\in\mathbb{N}\}+\sup\{|y_n|:n\in\mathbb{N}\}$ ומכאן נקבל הדרוש.

מש"ל

תזכורת

במרחב מטרי M הגדרתם בהרצאה כדור פתוח סביב a ברדיוס r:
$B(a,r)=\{x\in M\ :\ d(x,a)<r\}$, וכדור סגור סביב a ברדיוס r:
$B[a,r]=\{x\in M\ :\ d(x,a)\le r\}$.

הגדרה

יהי (M,d) מרחב מטרי ותהי $\{x_n\}$ סדרת נקודות ב- M. נאמר שהסדרה $\{x_n\}$ מתכנסת לנקודה $x\in M$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $d(x_n,x)<\varepsilon$.

במונחים של כדורים: לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כל שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $x_n\in B(x,\varepsilon)$.

הערה

הוכחתם בכיתה את הטענה הבאה: $x_n\xrightarrow{d}x \Leftrightarrow d(x_n,x)\to 0$.

תרגיל

תהי d_3 המטריקה ה-3–אדית על $\mathbb{Z}$.

א. תארו את $B_{d_3}\left(0,\frac{2}{5}\right), B_{d_3}\left[0,\frac{2}{5}\right]$.

ב. יהי $x\in B_{d_3}\left(0,\varepsilon\right)$. הראו ש-$B_{d_3}\left(0,\varepsilon\right)=B_{d_3}\left(x,\varepsilon\right)$ (כלומר, כל נקודה בכדור יכולה לשמש כמרכז הכדור).

ג. הוכיחו כי $x_n=2\cdot 3^n+5\xrightarrow{d_3}5$.

<u>פתרון</u>

א. נתחיל מהכדור הפתוח: $B_{d_3}\left(0,\frac{2}{5}\right)=\left\{x\in\mathbb{Z}:d_3\left(x,0\right)<\frac{2}{5}\right\}$. נשים לב שהמרחקים האפשריים במרחב זה הם $0,1,\frac{1}{3},\frac{1}{3^2},...,\frac{1}{3^n},...$. כמו כן מתקיים $\frac{1}{3}<\frac{2}{5}<1=\frac{1}{3^0}$ ולכן ניתן להסיק ש-$B_{d_3}\left(0,\frac{2}{5}\right)=B_{d_3}\left(0,1\right)$. כעת, אם $x\in B_{d_3}\left(0,1\right)$ אזי $x=0$ או $\frac{1}{3^{k(x,0)}}<1$. נניח ש-$x\neq 0$. אזי $\frac{1}{3^{k(x,0)}}<1\Leftrightarrow\frac{1}{3^{k(x,0)}}<\frac{1}{3^0}\Leftrightarrow k\left(x,0\right)>0\Leftrightarrow 3^1\mid x\Leftrightarrow x\in 3\mathbb{Z}$. ברור שאם $x=0$ אזי $x\in 3\mathbb{Z}$ ולכן $B_{d_3}\left(0,1\right)=3\mathbb{Z}$.

נעבור כעת לכדור הסגור:

$$B_{d_3}\left[0,\frac{2}{5}\right]=\left\{x\in\mathbb{Z}:d_3\left(x,0\right)\leq\frac{2}{5}\right\}=\left\{x\in\mathbb{Z}:d_3\left(x,0\right)<1\right\}=B_{d_3}\left(0,\frac{2}{5}\right)=3\mathbb{Z}.$$

ב. נוכיח הכלה דו כיוונית. נתחיל עם $B_{d_3}\left(0,\varepsilon\right)\subseteq B_{d_3}\left(x,\varepsilon\right)$. יהי $y\in B_{d_3}\left(0,\varepsilon\right)$. מתקיים $d_3\left(y,x\right)\leq\max\left\{d_3\left(y,0\right),d_3\left(0,x\right)\right\}<\varepsilon$ ולכן $y\in B_{d_3}\left(x,\varepsilon\right)$. ההכלה שניה מוכחת באותו האופן.

ג. לפי ההגדרה יש להראות שלכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $d_3\left(x_n,5\right)<\varepsilon$ (או באופן שקול $x_n\in B_{d_3}\left(5,\varepsilon\right)$). אנו נוכיח לפי הטענה השקולה להתכנסות ($x_n\xrightarrow{d}x\Leftrightarrow d\left(x_n,x\right)\to 0$): מתקיים

$$d_3\left(2\cdot 3^n+5,5\right)=\frac{1}{3^n}\xrightarrow{n\to\infty}0.$$

מש"ל

<u>תזכורת</u> – סדרת קושי

יהי (M,d) מרחב מטרי ו- $\{x_n\}\subseteq M$ סדרה. נאמר שהיא סדרת קושי אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n,m\geq n_0$ מתקיים $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי, וראיתם בהרצאה שההיפך אינו נכון. מרחב שבו כל סדרת קושי מתכנסת נקרא **מרחב שלם**.

<u>תרגיל</u>

תהי $\{e_n\}$ סדרה במרחב הנורמי ℓ_∞ אותו הכרנו בתרגול הקודם. הוכיחו שהסדרה אינה מתכנסת במרחב זה, למרות שהיא כן מתכנסת רכיב-רכיב (הערה: e_n זו סדרה שכל איבריה הם אפסים, פרט ל-"1" במקום ה-n).

<u>פתרון</u>

כזכור, כל נורמה משרה מטריקה, ולכן נעבוד עם התנאי השקול להתכנסות.

תחילה, ברור שבכל רכיב הסדרה e_n מתכנסת לאפס, שכן בכל רכיב החל ממקום ה-n היא קבועה לבסוף ושווה לאפס.

נראה כעת שהסדרה $\{e_n\}$ אינה מתכנסת לאף איבר ב-ℓ_∞. נניח בשלילה שהסדרה מתכנסת. לכן היא סדרת קושי. אך זאת סתירה שכן לכל $m\neq n$ מתקיים $d(e_n,e_m)=\|e_n-e_m\|=1$. לכן הסדרה לא מתכנסת.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהי $x_n\xrightarrow{d_p}x$ (כאשר d_p המטריקה הפי-אדית) ויהי $c\in\mathbb{Z}$. אזי: $cx_n\to cx$.

<u>פתרון</u>

עבור $c=0$ הטענה טריוויאלית. נניח ש-$c\neq0$.

צ"ל $d_p(cx_n,cx)\xrightarrow{n\to\infty}0$ כאשר $d_p(cx_n,cx)=\frac{1}{p^{k(cx_n,cx)}}$. מתקיים $k(cx_n,cx)=\max\left\{i:p^i\middle|c(x_n-x)\right\}=k(c,0)+k(x_n,x)$. נסמן $k(c,0)=m$

ונקבל $d_p(cx_n,cx)=\frac{1}{p^m}\cdot\frac{1}{p^{k(x_n,x)}}$. מכיוון ש-$\frac{1}{p^{k(x_n,x)}}\xrightarrow{n\to\infty}0$ לפי הנתון, נקבל הדרוש.

מש"ל

<u>דוגמה</u>

נראה שהמרחב $(\mathbb{Z}, d_5)$ אינו שלם. לשם כך נמצא סדרת קושי שאינה מתכנסת.

נגדיר את הסדרה: $x_n = 5^1 + 5^2 + ... 5^n$. נראה שזאת סדרת קושי. יהי $\varepsilon > 0$. קיים

$n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{5^{n_0+1}} < \varepsilon$. כעת, יהיו $m, n \geq n_0$ (בה"כ נניח $m > n$), אזי מתקיים

$$k(x_m, x_n) = \max\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 5^i \mid (x_m - x_n)\} = \max\{i \in \mathbb{N} \cup \{0\} : 5^i \mid (5^{n+1} + ... + 5^m)\} = n+1$$

ולכן $d_5(x_m, x_n) = \frac{1}{5^{n+1}}$ ולפי ההנחה $d_5(x_m, x_n) = \frac{1}{5^{n+1}} \leq \frac{1}{5^{n_0+1}} < \varepsilon$.

כדי להראות שהסדרה אינה מתכנסת נשים לב ש- $x_n = \frac{5^{n+1} - 5}{4}$. נניח בשלילה

שמתקיים $x_n \xrightarrow{d_5} x \in \mathbb{Z}$. אזי $4x_n \xrightarrow{d_5} 4x$ ולכן $(5^{n+1} - 5) \xrightarrow{d_5} 4x$. מצד שני

$(5^{n+1} - 5) \xrightarrow{d_5} -5$ ולכן (מיחידות הגבול) $-5 = 4x$, סתירה.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

נגדיר שתי מטריקות על $C[0,1]$ (מרחב הפונקציות הרציפות $f : [0,1] \to \mathbb{R}$)

באופן הבא: $d_{\max}(f, g) = \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x) - g(x)|$, $d(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$.

הראו כי $\{x^n\} \xrightarrow{\cancel{d_{\max}}} 0 \in C[0,1]$, $\{x^n\} \xrightarrow{d} 0 \in C[0,1]$.

<u>פתרון</u>

$$d(x^n, 0) = \int_0^1 |x^n - 0| dx = \int_0^1 x^n dx = \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \to 0.$$

מאידך, $\forall n \in \mathbb{N} : d_{\max}(x^n, 0) = \max_{0 \leq x \leq 1} |x^n - 0| = \max_{0 \leq x \leq 1} x^n = 1$ וסדרת המרחקים

אינה שואפת לאפס. לכן הסדרה אינה מתכנסת לפונקציית האפס.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מצאו מרחב מטרי (M,d) בו קיימים כדורים <u>שונים</u> $B(a_1,r_1), B(a_2,r_2)$ כאשר $r_1<r_2$ ו- $B(a_1,r_1)\supset B(a_2,r_2)$. תארו את הכדורים.

<u>פתרון</u>

יהי $M=[0,\infty)$ תת מרחב מטרי של $\mathbb{R}$ עם המטריקה הסטנדרטית. אזי $B(1,5)\subset B(3,4)$. ואכן,

$B(1,5)=\{x\in M : |x-1|<5\}=[0,6)$, $B(3,4)=[0,7)$.

מש"ל

<u>תזכורת</u>: יהי (X,d) מרחב מטרי. $A\subseteq X$ נקראת "קבוצה פתוחה" אם לכל $x\in A$ קיים $\varepsilon>0$ כך ש- $x\in B(x,\varepsilon)\subseteq A$.

<u>תרגיל</u>

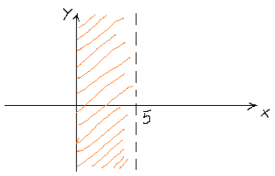
האם הקבוצות הבאות פתוחות ב- $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית?

א. $E=\{(x,y):0\le x<5\}$

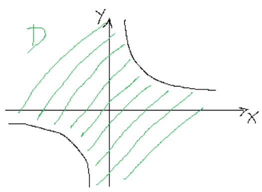
ב. $D=\{(x,y):xy<1\}$

<u>פתרון</u>

א. אינה פתוחה. ניקח למשל את הכדור $B(0,\varepsilon)$ ונראה כי הוא לא מוכל בקבוצה.



ב. זו קבוצה פתוחה: $\begin{cases} x>0,\ y<\frac{1}{x} \\ x<0,\ y>\frac{1}{x} \end{cases}$ (ניתן להסביר איך בוחרים סביבה פתוחה עבור כל נקודה בקבוצה).



מש"ל