

מבחן לדוגמא - בדידה מדעי המחשב (89198)

מרצה: אחיה בר-און
מתרגל: אריאל ויצמן
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
- ללא חומר עזר, פרט למחשבון פשוט.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- נמקו תשובתכם.
- ניקוד מקסמאלי הוא 120. הניקוד מצוין ליד כל שאלה. ציון מעל 100 יעוגל ל 100.
- בשאלות על עוצמות התשובות צריכות להיות מספר סופי או מתוך האפשרויות $\{\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph_0}, 2^{\aleph}\}$.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!

בהצלחה!

1. [7 נק' לסעיף] הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל פסוקים לוגיים מתקיים (הסימון \equiv בשאלה זאת מציין שקילות לוגית)
 $[(p \wedge q) \uparrow r] \equiv [(p \uparrow r) \wedge (q \uparrow r)]$.

(ב) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים כי $A \cap B = A \iff A \in P(B)$.

(ג) הקבוצה $A = \{6^n : n \in \mathbb{N}\}$ שווה לקבוצה $B = [\{2^n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{3^n : n \in \mathbb{N}\}]$

2. תהא $A = \{1, \dots, n\}$ ותהא $B = \{n+1, \dots, 2n\}$.

(א) [7 נק'] כמה תתי קבוצות מגודל n יש ל $A \cup B$?

(ב) [7 נק'] יהא $0 \leq k \leq n$. כמה תתי קבוצות מגודל n יש ל $A \cup B$ ש k איברים מתוכם בדיוק מקבוצה A ?

(ג) [5 נק'] צטטו את עקרון ההכלה הדחה.

(ד) [8 נק'] נניח כי n זוגי. כמה תתי קבוצות X של $A \cup B$ מגודל n יש כך X לא מכילה את $\{i, n+i\}$ לכל $0 \leq i \leq n$?

3. תהא X קבוצה. נגדיר יחס \sim על $P(X)$ כך: לכל $A, B \in P(X)$

$$A \sim B \iff |A| = |B|$$

(א) [6 נק'] הוכיחו כי \sim יחס שקילות.

(ב) [9 נק'] עבור $X = \mathbb{N}$ מצאו את עוצמת $P(\mathbb{N})/\sim$.

4. [8 נק'] נגדיר O קבוצת כל יחסי השקילות על $\{1, \dots, n\}$
 נגדיר $A = \{R \in O : |\{1, \dots, n\}/R| = 2\}$ הוכיחו באינדוקציה או בכל דרך אחרת כי $|A| = 2^{n-1} - 1$.

5. תהא A קבוצה ותהא $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר

$$R_f = \{(a, a') \in A \times A : f(a) | f(a')\}$$

כאשר $f(a) | f(a')$ פירושו $f(a)$ מחלק את $f(a')$.

(א) [7 נק'] הוכיחו כי R_f יחס סדר על $A \iff f$ חח"ע.

(ב) [7 נק'] עבור $A = \mathbb{N}$, מצאו f כך ש R_f יחס סדר קווי על A .

(ג) [8 נק'] עבור $A = \mathbb{Z}$ נגדיר O להיות קבוצת כל הפונקציות $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ כך ש R_f סדר קווי. מצאו את עוצמת O .

6.

(א) [7 נק'] יהא $G = (V, E)$ גרף פשוט לא מכוון ויהיו $v, u \in V$ הוכיחו כי קיים מסלול מ v ל $u \iff$ קיים מסלול פשוט מ v ל u .

(ב) יהא $G = (V, E)$ גרף פשוט לא מכוון. נגדיר את גרף הקו של G שמסומן $L(G)$ כך: $L(G) = (V', E')$ כאשר $V' = E$ ו

$$E' = \{\{e, e'\} \mid (e \neq e' \in E) \wedge (e \cap e' \neq \emptyset)\}$$

כלומר קבוצת הקודקודים של $L(G)$ היא קבוצת הקשתות של G ויש קשת בין שני קשתות אם יש להם קודקוד משותף.

i. [5 נק'] עבור $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}\}$ והגרף $G = (V, E)$ ציירו את הגרף $L(G)$.

ii. [4 נק'] תנו דוגמא ל G לא קשיר ו $L(G)$ כן קשיר.

iii. [9 נק'] נניח כי G אינו קשיר וקיימים שני רכיבי קשירות שעוצמתם גדולה שווה ל 2. הוכיחו כי $L(G)$ אינו קשיר.

😊 בהצלחה!