תורת הקבוצות- בוחן תשע"ח

24.12.2017

1. הוכיחו/הפריכו: (כל סעיף 20 נקודות)

(א) תהי $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ שרשרת של תת קבוצות סדורות היטב של $\mathbb{R}$. (כלומר, אם $i<j$ אז $A_i \subseteq A_j$.) אזי $\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ סדורה היטב.
פתרון: הפרכה. לכל i טבעי נגדיר

$$A_i = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, -i \leq n \leq 0\} = \{-i, \ldots, 0\}$$

זוהי שרשרת של תת קבוצות סדורות היטב של $\mathbb{R}$ (סדורות היטב כי הם סופיות ושרשרת כי $A_i \subseteq A_j$ לכל $i<j$). אבל

$$\cup_{i\in\mathbb{N}} A_i = -\mathbb{N} = \{-n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$$

אינה סדורה היטב כי ל $\{-n \,|\, n\in\mathbb{N}\}$ אין איבר קטן ביותר.

(ב) קבוצה $\langle A, < \rangle$ סדורה היטב אמ"ם כל תת קבוצה בת מניה שלה סדורה היטב.
פתרון: הוכחה.($\Leftarrow$) ברור. כל תת קבוצה של קבוצה סדורה היטב היא סדורה היטב.
($\Rightarrow$)נניח בשלילה כי $\langle A, < \rangle$ לא סדורה היטב. אזי קיימת סדרה $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ יורדת. סדרה זאת היא תת קבוצה בת מניה של A שאינה סדורה היטב (כי אין לה איבר קטן ביותר) סתירה.

2. הוכיחו/הפריכו: (כל סעיף 20 נקודות)

(א) כל סודר עוקב β הוא מהצורה $\alpha + n$ עבור סודר גבולי כלשהו α ו $n \in \mathbb{N}$.
פתרון: נוכיח באינדקוציה טרנ' את הטענה:לכל סודר β אם β סודר עוקב אז קיימים α סודר גבולי ו n טבעי כך ש $\beta = \alpha + n$.
יהא β סודר. נניח כי β עוקב אזי קיים סודר β' כך ש $\beta = \beta' + 1$ אם β' גבולי סיימנו. אחרת β' עוקב וניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה. קיימים α גבולי ו n טבעי כך ש $\beta' = \alpha + n$ ואז

$$\beta = \alpha + n + 1$$

וסיימנו (כי $n+1$ גם כן טבעי).

(ב) כל סודר גבולי $\beta > 0$ הוא מהצורה $\alpha + \omega$ עבור סודר כלשהו α.
פתרון:ω^2 הוא סודר גבולי. נניח בשלילה כי $\omega^2 = \alpha + \omega$. טענה: $\alpha < \omega^2$
הוכחה: אחרת $\omega^2 \leq \alpha$ ואז $\omega^2 < \omega^2 + \omega \leq \alpha + \omega = \omega^2$ סתירה.

כעת, מתקיים

$$\omega^2 = \omega\omega = \omega \sup\{n|\, n<\omega\} = \sup\{\omega n|\, n<\omega\}$$

וכיוון ש $\alpha < \omega$ קיים n קטן מ ω המקיים $\alpha \le \omega n$ ואז

$$\omega^2 = \alpha + \omega \le \omega n + \omega = \omega(n+1) < \omega^2$$

סתירה.

3. (30 נקודות) מצאו פונקציה שומרת סדר $f: \omega+\omega \to [0,1]$.
פתרון:נחלק את $[0,1]$לשני קטעים $[0,\frac{1}{2}),[\frac{1}{2},1]$ ונשלח את העותק הראשון של ω לקטע הראשון ואת העותק השני של ω לקטע השני. פורמלית:

$$f(n) = \begin{cases} 0 & n=0 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} & n \neq 0 \end{cases}$$

$$f(\omega+n) = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ 1 - \frac{1}{n+2} & n \neq 0 \end{cases}$$

קל לראות ש f שומרת סדר.

בהצלחה!