

אלגברה לינארית 2

תרגיל 3

שאלה 1:

תהא $A \in F^{n \times n}$, הוכיחו כי $\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{kj} |A_{ij}| = 0$ לכל $i \neq k$.
הדרכה: הגדירו מטריצה זהה ל- A פרט לשורה ה- i .

שאלה 2:

חשב את הדטרמיננטה של המטריצה הבאה:
הערה: a באלכסון הראשי, b באלכסון מעליו, ו- b נוסף בפינה השמאלית.
$$A = \begin{pmatrix} a & b & & 0 \\ \ddots & a & \ddots & \\ & 0 & \ddots & b \\ b & & \ddots & a \end{pmatrix} \in F^{n \times n}$$

שאלה 3:

תהא $A = \begin{pmatrix} z & \bar{z} & |z| \\ \bar{z} & z & |z| \\ \frac{1}{|z|} & \frac{1}{|z|} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$, $z \neq 0$.

- (א) מצא את $|A|$ ואת $\text{adj}(A)$.
- (ב) עבור אילו ערכי z המטריצה הפיכה.
- (ג) מצא את A^{-1} .

שאלה 4:

הוכח שלכל מטריצה $A \in F^{n \times n}$ משולשית עליונה גם $\text{adj}(A)$ משולשית עליונה.
רמז: חשב את המינור A_{ij} כאשר $i > j$.

ע"מ 81:

1.6 תרגיל. תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

- א. מצא את הערכים העצמיים של A . [רמז: בעזרת דטרמיננטה]
- ב. מצא את המרחבים העצמיים של A .

1.7 תרגיל. הוכח שלמטריצה $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ אין ערכים עצמיים.

1.9 תרגיל! [מקור: תהליכים מקריים] **מטריצת מרקוב** היא מטריצה ריבועית, שסכום אברי כל עמודה שלה הוא 1. תהא A מטריצת מרקוב. הוכח שלמטריצה A^t יש ערך עצמי $\lambda = 1$. מהו הוקטור העצמי המתאים?

1.12 תרגיל. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$, ותהא $T_A: \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^n$ ההעתקה של כפל במטריצה A משמאל. הוכח שהתכונות הבאות שקולות:

א. v וקטור עצמי של A (המתאים לערך עצמי λ).

ב. v וקטור עצמי של T_A (המתאים לערך עצמי λ).

תזכורת- מטריצה נילפוטנטית:

A היא מטריצה ריבועית, ומטריצה נילפוטנטית מסדר k היא $A^k = 0$ ו- $A^{k-1} \neq 0$.

1.15 תרגיל*. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ מטריצה נילפוטנטית מסדר k .

א. מהם הערכים העצמיים של A ?

ב. הוכח $(\lambda I - A)^k = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

קבוצת הערכים העצמיים של העתקה לינארית T נקראת **הספקטרום של T** , ומסומנת $\sigma(T)$. באופן דומה מגדירים את $\sigma(A)$ עבור מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

1.18 תרגיל. א. יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(AB) = \sigma(BA)$. [ראו: $(AB)v = (BA)Av$].

ב. תהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכח: $\sigma(A) = \sigma(A^t)$. [ראו: בעזרת דטרמיננטה]

בהצלחה!