שם הקורס: טופולוגיה
שם המרצה: דר' נוביק
מתרגלים: לואי פולב ומני שלוסברג

תרגיל בית מספר 3

תאריך הגשה: 02-05-2012

שאלה 1

מצאו את נקודות ההצטברות של תת הקבוצות הבאות של המרחב המטרי $\mathbb{R}$:

א) $\mathbb{Q}$.

ב) $(0,1)$.

שאלה 2

נסמן ב-A' את אוסף נקודות ההצטברות של A ; נסמן ב-A'' את אוסף נקודות ההצטברות של A' וכן הלאה.

יהי $X=\mathbb{R}$. נגדיר $X \supseteq A=\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

א. מצאו את A', A'' .

ב. האם A קומפקטי?

ג. האם $A\cup\{0\}$ קומפקטי?

שאלה 3

הוכיחו שכל מרחב מטרי סופי הוא קומפקטי.

שאלה 4

יהי X מ"מ קומפקטי . יהי $\{K_i\}_{i\in I}$ אוסף קבוצות סגורות, כך שכל חיתוך סופי של קבוצות מאוסף זה אינו ריק. הוכיחו ש- $\bigcap_{i\in I} K_i \neq \emptyset$.

שאלה 5

א. הוכיחו: כל מישור ב- $\mathbb{R}^3$ הוא סגור.

ב. הוכיחו: הקבוצה $B=\left\{(x,y,z) \mid 3e^x-35y^5<17y+z^2\right\}$ הינה פתוחה ב- $\mathbb{R}^3$.

ג. יהי $M_n(\mathbb{R})$ המרחב המטרי של המטריצות הריבועיות $n\times n$ עם מקדמים ממשיים.

(זהו המרחב המטרי $\mathbb{R}^{n\times n}$ עם המטריקה האוקלידית). הוכיחו שקבוצת המטריצות ההפיכות $GL_n(\mathbb{R})$ פתוחה במרחב זה.

<u>שאלה 6</u>

תהי $f: X\to Y$.

א) הוכיחו ש- $f^{-1}\left[A^C\right]=\left(f^{-1}[A]\right)^C$ לכל $A\subseteq Y$

א) נסחו והוכיחו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש- $f\left(A^C\right)=\left(f(A)\right)^C$ לכל $A\subseteq X$.

ב) הוכיחו ש- $f(A)\setminus f(B)\subseteq f(A\setminus B)$ לכל $A,B\subseteq X$.

ג) הוכיחו ש - $f(A)\setminus f(B)=f(A\setminus B)$ לכל $A,B\subseteq X$ $\Leftrightarrow$ f חח"ע.

<u>בונוס</u>

האם l_∞ קומפקטי?

בהצלחה!