תרגול 9- אושרית

היטלים אורתוגונליים והעתקה צמודה

היטל וקטור על וקטור שונה מאפס

הגדרה. יהי V מ, אז היטל של וקטור v על התת מרחב w (נסמן $W = Span\{w\}$) הוא וקטור $\pi_W(v)$ המקיים

1. $\pi_W(v) \in W$
2. $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

הערה. יהיו v, w וקטורים אז

$$\pi_W(v) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2} w$$

תרגיל. מצאו את היטל של הווקטור $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ על הווקטור $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

פתרון. לפי הערה

$$\pi_W(v) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1+2+3}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ואכן מתקיים $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in Span\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W^{\perp}$

הטלת וקטור על תת מרחב

הטלה על תת מרחב:

יהא V ממ"פ, $W \subset V$ תת מרחב ו $v \in V$ אזי ההטלה של v על W הוא וקטור המסומן $\pi_W(v)$ ומקיים

- $\pi_W(v) \in W$
- $v - \pi_W(v) \in W^{\perp}$

איך נחשב את ההטלה?

פתרון: נניח כי $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ בסיס אורתוגונלי של W. אזי מהתנאי הראשון קיימים סקלארים כך ש $\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in W$. איך נמצא את המקדמים? מהתנאי השני נקבל כי לכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים

$$
\begin{aligned}
0 &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \\
&= \langle v, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle
\end{aligned}
$$

כל האינדקסים השונים התאפסו

ולכן

$\alpha_j = \frac{<v,v_j>}{||v_j||^2}$ כלומר $\pi_W(v) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{<v,v_i>}{||v_i||^2} v_i$ במילים אחרות: $\pi_W(v)$ הוא סכום ההטלות של v על כל איבר בסיס v_j בנפרד.

דוגמא:

מה ההטלה של $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על $W = span\{v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$?

ראשית נמצא לו בסיס או"ג ע"י גרם שמידט

$$w_1 = v_1, w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

כעת נבדוק הטלות של $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ על איברי הבסיס:

ההטלה על $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ היא $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{<\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}>}{||\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}||^2}$

ההטלה על $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ היא$\frac{1}{2}$

$$\frac{\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{||\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}||^2} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{3/2}{6/4} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ולכן ההטלה על התת מרחב היא

$$\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

טענה:

בסימונים לעיל $||v-\pi_W(v)|| = \min\{||v-w|| \mid w\in W\}$ (כלומר ההיטל הוא הנקודה הכי קרוב ב W ל v או הסטיה המינמאלית של v מ W מתקבלת ב u.)

הוכחה:

הוכחה: לכל $w\in W$ מתקיים כי
$||v-w||^2 = ||(v-\pi_W(v))+(\pi_W(v)-w)||^2 = ||v-\pi_W(v)||^2+||\pi_W(v)-w||^2 \geq ||v-\pi_W(v)||^2$ כאשר המעבר האמצעי הוא פיתרגורס.

הוספנו וחיסרנו את אותו גודל

הורדת גודל אי שלילי

ההעתקה הצמודה

משפט

תהי $T:V\to W$ העתקה ליניארית בין מרחבי מכפלה פנימית מעל אותו שדה.

א. קיימת העתקה יחידה $T^*:W\to V$ כך שלכל $w\in W, v\in V$ מתקיים: $\langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle$.

ב. ההעתקה $T^*:W\to V$ היא העתקה ליניארית.

כאשר המ"פ כאן היא
המ"פ של המרחב V

כאשר המ"פ כאן היא
המ"פ של המרחב W

דוגמה. יהיו $V=\mathbb{R}^2, W=\mathbb{R}^3$ ממ"פ עם המכפלה הסטנדרטית ו-$T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ההעתקה לינארית המוגדרת באופן הבא

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ 2y \\ 2x-y \end{pmatrix}$$

טענה:

$$T^*\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2z \\ x+2y-z \end{pmatrix}$$

הוכחה:

נראה זאת! יהיו שני ווקטורים $v=\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ ו-$w=\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ ואז צריך להראות ש-

$$\langle T(v), w\rangle_W = \langle v, T^*(w)\rangle_V$$

כאשר זו המ"פ הסטנדרטית של כל ממ"פ

המשך הוכחה:

נחשב כל אגף הנפרד ונקבל

$$\langle T(v), w\rangle_W =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ 2y_1 \\ 2x_1-y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$(x_1+y_1)x_2 + 2y_1y_2 + (2x_1-y_1)z_2$$

ו-

$$\langle v, T^*(w)\rangle_V =$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2+2z_2 \\ x_2+2y_2-z_2 \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$x_1(x_2+2z_2) + y_1(x_2+2y_2-z_2)$$

ואכן שני הביטויים שווים!

תכונות ההעתקה הצמודה:

1

$$(T_1+T_2)^* = T_1^* + T_2^*$$

2

$$T^{**} = T$$

תכונת העתקה צמודה

הרמיטיות

$$\langle w,(T^*)^*(v)\rangle = \langle T^*(w),v\rangle =$$

תכונת העתקה צמודה

$$\overline{\langle v,T^*(w)\rangle} =$$

$$\overline{\langle T(v),w\rangle} =$$

הרמיטיות

$$\langle w,T(v)\rangle$$

3

$$(ST)^* = T^*S^*$$

תכונת העתקה צמודה

תכונת העתקה צמודה

$$\langle v,(ST)^*(w)\rangle = \langle ST(v),w\rangle =$$

תכונת העתקה צמודה

$$\langle T(v),S^*(w)\rangle =$$

$$\langle v,T^*(S^*(w))\rangle =$$

הרכבת העתקות

$$\langle v,(T^*S^*)(w)\rangle$$

המשך תכונות העתקה צמודה:

4. $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

5. $[T^*]_S = ([T]_S)^*$ לכל S בסיס א״נ (זה לא נכון בהכרח אם S לא א״נ)

6. אם T הפיכה אז גם T^* הפיכה ומתקיים $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

תכונות נוספות הנובעות מהקודמות:

6. $\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, T(w)\rangle$

כי:

תכונת העתקה צמודה

לפי תכונה 2

$$\langle T^*(v), w\rangle = \langle v, T^{**}(w)\rangle = \langle v, T(w)\rangle$$

7. $\langle T(v), T(v)\rangle \in \mathbb{R}$ גם אם V זה מ"ו עם מרוכבים

כי:

$$\langle T(v), T(v)\rangle \underset{\text{עפ"י מש' קודם}}{=} \langle v, T^*T(v)\rangle$$

לפי הגדרת העתקה צמודה

//תכונה 6

$$= \langle T^*T(v), v\rangle$$

//תכונות מ"פ

$$= \overline{\langle v, T^*T(v)\rangle}$$

אם מספר שווה לצמוד המרוכב שלו הוא ממשי

<u>תרגיל:</u> $V=W=\mathbb{R}^2$ עם המ"פ הסטנדרטית.

יהי $T(x,y)=(2x+3y,\,2y)$ הע"ל מ- V ל- V. מצאו T^*.

<u>פתרון:</u> אנו יודעים עפ"י תמונה 5 שעבור בסיס א"נ $[T^*]_S=([T]_S)^*$.

ניקח בסיס א"נ ל- $\mathbb{R}^2$: $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$[T^*]_S \overset{\text{עפ"י}}{=} ([T]_S)^* = \left(\left[T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right]_S \left[T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right]_S\right)^*$$

$$= \begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}^* = \overline{\begin{pmatrix}2&3\\0&2\end{pmatrix}}^{\,t} = \begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$T^*\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&0\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = (2x,\,3x+2y)$$

תרגיל:

תהי $T:V\to V$ הע"ל, ו $U\leq V$ תת מרחב T-אינווריאנטי. אזי $U^{\perp}$ הוא T^* אינווריאנטי.

פתרון:

יהי $w\in U^{\perp}$, ו $u\in U$. $\langle T^*(w),u\rangle=\langle w,T(u)\rangle=0$ מכיוון ש $T(u)\in U$ ו $w\in U^{\perp}$. לכן, $T^*(w)\in U^{\perp}$.

תכונת ההעתקה הצמודה

המכפלה הפנימית שלו
עם Uהיא 0

T(U) in U

תרגיל:

תהי $T:V\to W$ הע"ל. אזי: $(Im(T))^{\perp}=\ker(T^{*})$.

פתרון:

$\subseteq$: יהי $w\in(Im(T))^{\perp}$. כלומר, לכל $v\in V$, $\langle w,T(v)\rangle=0$.
אזי: $\langle T^{*}(w),v\rangle=0$. כלומר, $T^{*}(w)$ ניצב לכל V ולכן $T^{*}(w)=0$. כלומר, $w\in\ker T^{*}$.

$\supseteq$: יהי $w\in\ker T^{*}$. כלומר, $T^{*}(w)=0$.
יהי $v\in V$. $\langle w,T(v)\rangle=\langle T^{*}(w),v\rangle=\langle 0,v\rangle=0$.
נקבל ש: $w\in(Im(T))^{\perp}$.

הערה: באופן שקול:

1. $Im(T)=(\ker T^{*})^{\perp}$
2. .2 $(ImT^{*})^{\perp}=\ker T$

הוכחה ישירה שיעורי בית

מסקנה:

1. T על $\iff$ T^* חח"ע.
2. T חח"ע $\iff$ T^* על.

הוכחה:

1. T על $\iff$ $ImT = W$ $\iff$ $(ImT)^{\perp} = \{0\}$ $\iff$ $\ker T^* = \{0\}$ $\iff$ T^* חח"ע.
2. נובע מ1 ע"י החלפת T ב T^*.

בהצלחה!!!