תרגיל 7

1. מהם רכיבי הקשירות ב$\mathbb{Q}$ עם הטופולוגיה האוקלידית?
פתרון:

רק הנקודונים. הסבר: תהי $A \subseteq \mathbb{Q}$ קבוצה כך ש$|A| \geq 2$. נבחר $a < b \in A$. ידוע שקיים מס' אי רציונלי $a < r < b$. לכן $A = (A \cap (-\infty, r)) \cup (A \cap (r, \infty))$ הוא פירוק לא טריוויאלי של A לקבוצות פתוחות.

2. הוכיחו שבלתי קשירות לחלוטין היא תכונה תורשתית.
פתרון:

יהי X מרחב בלתי קשיר לחלוטין ו$Y \subseteq X$. ותהי $A \subseteq Y$ קבוצה בת יותר מאיבר 1. אזי כתת קבוצה של X היא לא קשירה, ולכן אינה קשירה גם כתת קבוצה של Y.

3. (א) הוכיחו כי מרחב טופלוגי X הוא טריויאלי אם ורק אם יש לו בסיס בעל קבוצה אחת.

פתרון. אם המרחב X טריויאלי אז X היא הקבוצה הפתוחה הלא ריקה היחידה ולכן בוודאי ש $\mathcal{B} = \{X\}$ בסיס. מצד שני נניח ש $\mathcal{B} = \{B\}$ בסיס של X. X בעצמה קבוצה פתוחה וצריכה להיות איחוד של אברים מהבסיס ולכן בהכרח $B = X$. לכן אין עוד קבוצות פתוחות חוץ מ X וזו טופולוגיה טריויאלית.

(ב) יהי X מרחב דיסקרטי, הוכיחו כי קבוצה של קבוצות פתוחות (שזו בעצם סתם קבוצה של קבוצות) היא בסיס אם ורק אם היא מכילה את כל היחידונים (הקבוצות בגודל 1)

פתרון. יהי $\mathcal{B}$ בסיס של מרחב דיסקרטי. כל יחידון $\{x\}$ הוא קבוצה פתוחה ולכן אמור להיות איחוד של אברים מהבסיס. אבל אם B קבוצה לא ריקה המקיימת $B \subseteq \{x\}$ אז בהכרח $B = \{x\}$ ולכן כל היחידונים הם איברים בבסיס. מצד שני נניח שכל היחידונים הם אברים ב $\mathcal{B}$, אז בוודאי כל קבוצה היא איחוד של קבוצות מגודל 1 ולכן כל קבוצה היא איחוד של אברים מ $\mathcal{B}$ ולכן זה באמת בסיס.

4. יהי (X, τ) מרחב טופולוגי B_2, הוכיחו כי $|\tau| \leq \aleph = 2^{\aleph_0}$.

פתרון. יש ל X בסיס בן מניה $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i=1}^{\infty}$. כל קבוצה פתוחה P אפשר לכתוב כאיחוד של איברים מהבסיס.

$$O = \bigcup_{i \in I_P} B_i$$

כאשר $I_O \subseteq \mathbb{N}$. (כמובן, הבחירה של קבוצת האינדקסים I_O לא יחידה אבל אפשר לבחור קבוצה כלשהיא) נגדיר פונקציה

$$f : \tau \to P(\mathbb{N})$$

(כאן $P(\mathbb{N})$ זאת קבוצת החזקה) לפי

$$f(O)=I_O$$

נשים לב ש f חד חד ערכית כי אם

$$f(O_1)=f(O_2)$$

כלומר

$$I_{O_1}=I_{O_2}$$

אז

$$O_1=\bigcup_{i\in I_{O_1}}B_i=\bigcup_{i\in I_{O_2}}B_i=O_2$$

ולכן העוצמות מקיימות ש

$$|\tau|\leq|P(\mathbb{N})|=\aleph$$

כנדרש.

5. תהי X קבוצה לא בת מניה עם טופולוגיה קו-מנייתית (cocountable).כלומרת הקבוצות הפתוחות הן קבוצה ריקה, וקבוצות שהמשלים שלהן הוא בן מניה. האם מרחב זה הוא B_2?

פתרון. פתרון:

נוכיח ש(X,τ) אינו ספרבילי, ולכן אינו B_2. נניח בשלילה ש X ספרבילית אז יש קבוצה בת מניה A שהיא צפופה, כלומר $cl(A)=X$. אבל A בת מניה ולכן סגורה, כי המשלימה שלה פתוחה. ולכן $cl(A)=A$. קיבלנו $A=X$ בסתירה לכך ש X לא בת מניה.

6. (א) יהי X מרחב B_2. הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף).כלומר, אם יש אוסף $\mathcal{U}$ של קבוצות פתוחות כך ש$X=\bigcup_{U_i\in\mathcal{U}}U_i$, אז יש תת קבוצה בת מניה $\mathcal{O}\subseteq\mathcal{U}$ כך ש$X=\bigcup_{U_i\in\mathcal{O}}U_i$.

פתרון. יהי $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ כיסוי של קבוצות פתוחות ויהי $\mathcal{B}$ בסיס בן מניה. לכל $x\in U$, קיים $B_x\in\mathcal{B}$ כך ש $x\in B_x\subseteq U$ (לפי הגדרת בסיס). ברור ש $\{B_x\}_{x\in X}$ הינו כיסוי עבור X. למרות ש X יכולה להיות לא בת מניה, הכיסוי הזה חייב להיות בן מניה כי הוא מכיל רק אברים מ $\mathcal{B}$שהיא קבוצה בת מניה. לכן קיימת איזה קבוצה בת מניה $Y\subseteq X$ כך ש $\{B_y\}_{y\in Y}$ הוא גם כיסוי עבור X. כעת, לפי הבניה שלנו, ניתן לראות שלכל $y\in Y$ יש איזה $U\in\mathcal{U}$ כך ש $B_y\subseteq U$. יכולות להיות כמה קבוצות כאלה, אבל יש לפחות אחת. נבחר אחת מהן ונסמן אותה U_y. כעת האוסף $\{U_y\}_{y\in Y}$ שהוא תת קבוצה של $\mathcal{U}$ הוא וודאי בן מניה (מאונדקס ע״י Y שהיא קבוצה בת מניה) והוא מכסה את X כי

$$X=\bigcup_{x\in X}B_X\subseteq\bigcup_{x\in X}U_X$$

ולכן זה תת כיסוי בן מניה כנדרש.

(ב) יהי X מרחב B_2. הראו שלכל בסיס $\mathcal{B} = \{B_i\}_{i\in I}$ יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס.

פתרון. יהי $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ בסיס בן מניה של X. היות שגם $\mathcal{B}$ בסיס. כל C_i הוא איחוד איברים מ $\mathcal{B}$. נניח שלכל $i \in \mathbb{N}$ יש קבוצת אינדקסים J_i כך ש

$$\bigcup_{j\in J_i} B_j = C_i$$

לפי שאלה 4 C_i עצמו הוא גם מרחב מניה שניה בתור תת מרחב. לכן, לפי הסעיף הקודם, לכל כיסוי יש תת כיסוי בן מניה. לכן יש קבוצת אינדקסים בת מניה

$$K_i \subseteq J_i$$

כך ש

$$\bigcup_{j\in K_i} B_j = C_i$$

נשים לב ש $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ היא קבוצה בת מניה בתור איחוד בן מניה של בנות מניה. לכן הקבוצה $\{B_j \mid j \in \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i\}$ היא גם בת מניה. אבל קבוצה זו היא גם בסיס כי כל איבר מהבסיס C_i הוא איחוד של איברים מקבוצה זו. ובזה סיימנו.