תרגיל בית 11

1. יהיו $f : \alpha \to \beta, g : \beta \to \gamma$ פו' קופינליות. הוכיחו/הפריכו:

   (א) אם f שומרת סדר אז $g \circ f : \alpha \to \gamma$ קופינלית.
   הפרכה:

   נקח $\alpha = \beta = \omega, \gamma = \omega + 1$. ונגדיר את הפונקציות הבאות: $f(n) = n + 1$, $g(0) = \omega, g(n+1) = n+2$. שתיהן פונקציות קופינליות, וf פונקציה שומרת סדר. אולם, $g \circ f$ לא קופינלית, כי ל$\omega \in \omega + 1$, שהוא איבר מקסימלי, אין מקור.

   (ב) אם g שומרת סדר, אז $g \circ f : \alpha \to \gamma$ קופינלית.
   הוכחה:

   יהי $x \in \gamma$. קיים $y \in \beta$ כך ש $g(y) \geq x$. קיים $z \in \alpha$ כך ש$f(z) \geq y$. מכיוון שg שומרת סדר, נקבל ש $g(f(z)) \geq g(y) \geq x$. לכן $g \circ f$ קופנלית.

2. יהי α הסודר המינימלי שמקיים $\omega^\alpha = \alpha$. חשבו $\mathrm{cof}(\alpha)$.
   פתרון:

   תזכורת: בנינו את הסודר הנ"ל כגבול של סדרה עולה $\alpha = \lim \alpha_n$. בפרט, יש פו' קופינלית $f : \omega \to \alpha$ ע"י $f(n) = \alpha_n$. לכן $\mathrm{cof}(\alpha) \leq \omega$. מצד שני, α גבולי, ולכן $\mathrm{cof}(\alpha) \geq \omega$. קיבלנו: $\mathrm{cof}(\alpha) = \omega$.

3. הוכיחו את הטענות הבאות על חזקות של מונים: יהיו κ, λ, μ מונים.

   (א) אם $\mu > \lambda$ ו $\kappa \neq 0$' אז $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.
   הוכחה:

   קיימת פו' $f : \lambda \to \mu$ חח"ע. נבחר $x \in \kappa$ (ניתן לעשות זאת, כי $\kappa \neq 0$) ונבנה פו' $g : {}^{\lambda}\kappa \to {}^{\mu}\kappa$ ע"י, $g(h)(\alpha) =$ אם $\alpha = f(\beta)$ אז נשלח ל$h(\beta)$, אחרת נשלח לx. קל לבדוק שזאת פו' חח"ע.

   (ב) אם $\lambda > \kappa$ אז $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
   הוכחה:

   קיימת פו' $f : \kappa \to \lambda$ חח"ע. נבנה $h : {}^{\mu}\kappa \to {}^{\mu}\lambda$ ע"י $h(g) = f \circ g$. קל לראות שh חח"ע.

   (ג) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^\lambda \kappa^\mu$.
   הוכחה:

   נגדיר $h : {}^{\lambda \uplus \mu}\kappa \to {}^{\lambda}\kappa \times {}^{\mu}\kappa$ ע"י $h(f) = (f|_\lambda, f|_\mu)$. קל לראות שהפו' חח"ע ועל.
   (גם הכפל והחזקות הם כמונים ולא כסודרים)