

המחלקה למתמטיקה - אוניברסיטת בר-אילן

טופולוגיה – 05-222-88 – סמסטר ב' תשע"ט, 05.08.19 מבחן מועד ב'
מרצה: מיכאל מגרל מתרגלת: תמר בר-און

הנחיות:

- יש לבחור 4 מתוך 5 שאלות. נא לסמן על דף ראשון פנימי מספר תרגיל שלא בחרתם.
- כל שאלה שווה 25 נקודות. שאלת הבונוס שווה 5 נקודות. הציון הסופי לא יעבור את 100.
- אין להשתמש בכל חומר עזר, טלפון נייד או מחשבון.
- משך הבחינה שלוש שעות. מותר לקחת דף זה בסוף המבחן.

השאלות:

1.

- א. משפט: הוכיחו שבמרחב מטרי (X, d) תת קבוצה לא ריקה A היא סגורה אם ורק אם היא קבוצת אפסים של פונקציה רציפה ממשית $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ חסומה.
- ב. הוכיחו שכל קבוצה סגורה A במרחב מטרי X היא שווה לחיתוך $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ בן מנייה של קבוצות פתוחות O_n כך ש $cl(O_{n+1}) \subseteq O_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

2.

- א. במרחב \mathbb{R}^3 נגדיר יחס שקילות $(x, y, z) \sim (a, b, c) \Leftrightarrow x = a$. תארו מרחב המנה \mathbb{R}^3 / \sim .
- ב. תנו דוגמה של תת מרחב X ב \mathbb{R}^3 כך ש X קשיר מקומית עם 3 מרכיבי קשירות ו X תת קבוצה פתוחה ב \mathbb{R}^3 .

3.

- א. בקו סורגנפראי \mathbb{R}_s חשבו מרכיב קשירות של הנקודה 0 והוכיחו שתת קבוצה $[0, 1]$ היא לא קומפקטית.
- תזכורת: תת קבוצה U של \mathbb{R} פתוחה בטופולוגיית סורגנפראי אם $x \in U \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 [x, x + \varepsilon] \subseteq U$.
- ב. משפט האלומות: נניח X מרחב טופולוגי, Y_i $i \in I$ אוסף תת קבוצות קשירות כך שהחיתוך $X = \bigcup_{i \in I} Y_i$ לא ריק ו $\bigcap_{i \in I} Y_i = \emptyset$.

4.

- א. תנו דוגמה של מרחב טופולוגי שהוא T_2 אבל לא T_3 .
- ב. על קבוצת ממשיים \mathbb{Z} נגדיר $O_n := \{n, n+1, \dots\}$ $\tau = \{O_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{Z}\}$. הוכיחו: (\mathbb{Z}, τ) מרחב טופולוגי והוא לא מטריזבילי.

5.

- א. הוכיחו שמרחב קומפקטי מטריזבילי הוא: ספרבילי ועוצמתו לא יותר מעוצמת ממשיים.
- ב. נניח $f_1: X \rightarrow Y$ $f_2: X \rightarrow Y$ פונקציות רציפות ממרחב טופולוגי X לתוך מרחב Y האוסדורפי. קיימת תת קבוצה צפופה A ב X כך ש $f_1(a) = f_2(a)$ לכל $a \in A$. הוכיחו ש $f_1 = f_2$.

שאלת בונוס (5 נקודות):

- נניח X מרחב האוסדורף וקומפקטי מקומית. הוכיחו שלכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה Y ב X עם $a \notin Y$ קיימת פונקציה רציפה $f: X \rightarrow [0, 1]$ כך ש $f(Y) = 1, f(a) = 0$.

בהצלחה !