

אלגברה לינארית 1 (88112) – סמסטר קיץ תשפ"ה – בוחן

הצעה לפתרון באדיבות עדי מכנס

1. תהא $A \in \mathbb{R}^{4 \times 5}$ מטריצה שלאחר פעולות דירוג מתקבלת המטריצה הבאה:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

א. (10 נק') מצאו את הפתרון הכללי של המערכת $Ax = 0$.

פתרון:

קל לוודא כי U מטריצה מדורגת קנונית. כמו כן, קל לראות כי אם נסמן $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$ אזי x_2, x_5

משתנים חופשיים. לכן נציב פרמטר $x_2 = t, x_5 = s$ ונקבל:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_5 = -2t + s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -x_5 = -s \\ 0 = 0 \end{cases}$$

לכן הפתרון הכללי יהיה:

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2t + s \\ t \\ 0 \\ -s \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5 \mid t, s \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

ב. (15 נק') יהיו $u, v \in \mathbb{R}^5$ כך ש $v - u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. הוכיחו שלכל $b \in \mathbb{R}^4$ מתקיים: $Av = b$ אם

ורק אם $Au = b$.

פתרון:

ראשית, קל לוודא כי עבור $t = s = 1$ מהסעיף הקודם נקבל את הוקטור הנתון. לפיכך $v - u$ הוא פתרון של המערכת ההומוגנית. כלומר:

$$\vec{0} = A(v - u) = Av - Au$$

(אלגברת מטריצות) כלומר:

$$\Leftrightarrow Av = Au$$

ולכן אם $Av = b$ אזי גם $Au = b$ (וכן להיפך, כמובן).

משל ■.

ג. (10 נק') הוכיחו או הפריכו: למערכת $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ אין פתרון.

פתרון:

הפרכה

נביט במערכת המבוטאת ע"י מטריצת מקדמים ווקטור קבועים:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

נדרג ונקבל:

$$\xrightarrow{R_5 - R_4} \left(\begin{array}{ccccc|c} U & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \end{array} \right)$$

אבל קל לראות שלמערכת הזו אין שורות סתירה, ולפיכך למערכת זו יש פתרון.

2. (15 נק' לכל סעיף) נתבונן במרחב המטריצות הריבועיות $V = \mathbb{R}^{n \times n}$. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות קבעו האם היא תת-מרחב של V או לא. הוכיחו את תשובתכם.
א. $U = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \exists \alpha \in \mathbb{R}: A^t = \alpha A\} \subseteq V$.

פתרון:

נראה כי U אינו תת-מרחב של V ע"י כך שנוכיח שהקריטריון המקוצר לא מתקיים עבור:

$$A = I_2(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U$$

(עם סקלר $\alpha_A = 1$ וכן:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in U$$

(עם סקלר $\alpha_B = -1$) יחד עם הסקלר $c = 1 \in \mathbb{R}$.

נשים לב כי:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$(A+B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ונוכיח שלא קיים α כך ש:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (A+B)^t = \alpha(A+B) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

אכן, משוויון מטריצות נקבל כי:

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot \alpha \\ -1 = 1 \cdot \alpha \end{cases} \rightarrow -1 = \alpha = 1$$

סתירה.

ב. עבור $\alpha \in \mathbb{R}$ נגדיר: $W_\alpha = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid A^t = \alpha A\} \subseteq V$.

פתרון:

נוכיח שאכן לכל α מתקיים כי W_α תמ"ו של V .

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. ניעזר בקריטריון המקוצר:

אכן, מטריצת האפס מקיימת לכל α :

$$0_{n \times n} = 0_{n \times n}^t = \alpha \cdot 0_{n \times n} = 0_{n \times n}$$

כעת, יהיו $A, B \in W_\alpha$ וכן $c \in \mathbb{R}$. צ"ל $A + cB \in W_\alpha$. כלומר צ"ל:

$$(A + cB)^t = \alpha(A + cB)$$

נפתח לפי אלגברת מטריצות:

$$(A + cB)^t = A^t + cB^t$$

אבל לפי הנתון:

$$A^t + cB^t = \alpha A + c(\alpha B) = \alpha A + \alpha(cB) = \alpha(A + cB)$$

כנדרש.

■ משל

3. (15 נק' לכל סעיף) נאמר כי מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ דומה למטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אם קיימת $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $P^{-1}AP = B$ או באופן שקול: $AP = PB$.

הערה כללית לאורך כל השאלה: למען הנוחות, נסמן ש A דומה ל B ע"י $A \sim B$.

א. תהיינה $A, B, C \in \mathbb{F}^{n \times n}$. הוכיחו שאם A דומה ל B וגם B דומה ל C אז A דומה ל C .

פתרון:

כיוון ש $A \sim B$ וגם $B \sim C$, קיימות מטריצות הפיכות $P_{A,B}, P_{B,C} \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$$\begin{cases} B = P_{A,B}^{-1} \cdot A \cdot P_{A,B} \\ C = P_{B,C}^{-1} \cdot B \cdot P_{B,C} \end{cases}$$

וצריך למצוא $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה כך ש:

$$C = P^{-1}AP$$

נציב את הנתון הראשון בנתון השני ונקבל:

$$C = P_{B,C}^{-1} \cdot (P_{A,B}^{-1} \cdot A \cdot P_{A,B}) \cdot P_{B,C} = (P_{B,C}^{-1} P_{A,B}^{-1}) A (P_{A,B} P_{B,C})$$

ולכן אם נבחר:

$$P = P_{A,B} P_{B,C}$$

נקבל מאלגברת מטריצות כי P אכן הפיכה וההופכית שלה:

$$P^{-1} = P_{B,C}^{-1} P_{A,B}^{-1}$$

ולכן אכן נקבל את הנדרש.

■ משל

העשרה: דמיון מטריצות הוא יחס שקילות על $\mathbb{F}^{n \times n}$. מה שהוכחנו לעיל היה תכונת הטרנזיטיביות. הקוראים מוזמנים להוכיח את שאר התכונות.

ב. יהא $\alpha \in \mathbb{F}$ ותהא $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $A = \alpha I$. הוכיחו או הפריכו: קיימת $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $B \neq A$ וגם B דומה ל A .

פתרון:

הפרכה

ניקח את $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ (למען האמת כל שדה יעבוד אך זוהי טענת לכל על השדה במובלע) ואת $\alpha = 0$.
לכן $A = 0_{n \times n}$. כעת, נניח בשלילה שאכן קיימת $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כנ"ל. לכן קיימת $P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש:

$$P^{-1}BP = A = 0_{n \times n}$$

נכפיל את שני הצדדים ב P^{-1} מימין ונקבל:

$$P^{-1}B = 0_{n \times n}$$

נכפיל את שני הצדדים ב P משמאל ונקבל:

$$B = 0_{n \times n}$$

בסתירה לכך ש $B \neq A$.

העשרה: באופן כללי, לכל $\alpha \in \mathbb{F}$ כנ"ל לא קיימת מטריצה B שדומה אך שונה מ A . נב"ש שאכן קיימת כזו. לכן:

$$B = P^{-1}AP$$

אבל:

$$A = \alpha I$$

ולכן:

$$B = P^{-1}(\alpha I)P = \alpha(P^{-1}IP) = \alpha P^{-1}P = \alpha I = A$$

בסתירה.

ג. תהא $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ מטריצה המקיימת:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

הוכיחו: A דומה ל $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

פתרון:

עלינו למצוא P הפיכה כך ש:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ננחש כי:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(הוקטורים הנתונים לעיל, בעמודות של P).

איך אפשר היה לנחש זאת? בעזרת חישוב כפל מטריצות לפי עמודות (כפי שאפשר לראות להלן), או לנסות להשתמש בנתונים בשביל לדעת איך להתקדם.

כעת, קל לוודא כי P הפיכה וכן:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{(-1)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ואכן, אם נחשב את הכפל נקבל לפי כפל לפי עמודות:

$$P^{-1}AP = P^{-1}(AP) = P^{-1} \begin{pmatrix} | & | \\ AC_1(P) & AC_2(P) \\ | & | \end{pmatrix} =$$

אבל $C_1(P), C_2(P)$ הם בדיוק הווקטורים הנתונים! לפיכך אנחנו יודעים מהי המכפלה בדיוק!

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

כנדרש.

■ משל

העשרה: ניחוש מושכל זה לא בא במקרה. על הטריק הזה עוד תלמדו בקורס אלגברה לינארית 2, ושמו לכסון.