תרגיל בית 14 בתורת החבורות
88-218 סמסטר א' תשפ"ב

הערה. אספנו כאן שאלות רבות בשני נושאים נוספים למי שרוצה תרגול נוסף. השאלות כאן ברמת קושי משתנה ולא לפי קושי עולה.

אוטומורפיזמים

שאלה 1. תהי G חבורה. נסמן את קבוצת כל האוטומורפיזמים של G בסימון $\mathrm{Aut}(G)$.

א. הוכיחו כי $\mathrm{Aut}(G)$ היא חבורה ביחס לפעולה של הרכבת פונקציות.

ב. מצאו באופן מפורש את כל איברי $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$. רמז: החבורה $\mathbb{Z}$ ציקלית.

ג. יהי $n \in \mathbb{N}$. הוכיחו כי $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n) \cong U_n$.

ד. תהינה G, H חבורות. הוכיחו שקיים שיכון

$$\Phi\colon\ \mathrm{Aut}(G) \times \mathrm{Aut}(H) \hookrightarrow \mathrm{Aut}(G \times H)$$

ה. יהי p ראשוני. הוכיחו כי $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_p^n) \cong GL_n(\mathbb{Z}_p)$. רמז: למעשה $\mathbb{Z}_p$ הוא שדה, ועוברים לקצת אלגברה לינארית.

ו. נניח כי G סופית ולא טריוויאלית. הוכיחו שאם $\mathrm{Aut}(G)$ פועלת טרנזיטיבית על הקבוצה $G \setminus \{e\}$, אז קיימים ראשוני p וטבעי n כך ש-$G \cong \mathbb{Z}_p^n$.

שאלה 2. תהי G חבורה, ויהי $a \in G$ איבר כלשהו.

א. (חימום) הוכיחו כי הפונקציה $\gamma_a\colon G \to G$ המוגדרת לפי $\gamma_a(g) = aga^{-1}$ היא אוטומורפיזם. רמז: הוכחתם את זה כבר בתרגיל הבית החמישי.

ב. אוטומורפיזם מן הצורה γ_a נקרא אוטומורפיזם פנימי של G. נסמן את קבוצת כל האוטומורפיזמים הפנימיים של G בסימון $\mathrm{Inn}(G) = \{\gamma_a \,|\, a \in G\}$. הוכיחו כי $\mathrm{Inn}(G)$ היא חבורה ביחס לפעולת ההרכבה.

ג. הוכיחו כי $G/Z(G) \cong \mathrm{Inn}(G)$. רמז: הגדירו פונקציה ברורה מ-G ל-$\mathrm{Aut}(G)$.

ד. הוכיחו כי $\mathrm{Inn}(S_3) \cong S_3$.

ה. מצאו אוטומורפיזם שאינו פנימי של החבורה $S_3 \times S_3$. רמז: נוח לחשוב על $S_3 \times S_3$ כתת־חבורה של S_6 ושם לחפש אוטומורפיזם.

ו. תהינה G, H חבורות. הוכיחו כי $\mathrm{Inn}(G) \times \mathrm{Inn}(H) \cong \mathrm{Inn}(G \times H)$.

ז. הוכיחו כי $\mathrm{Inn}\,(G) \lhd \mathrm{Aut}(G)$. רמז: בדקו מי הוא $\varphi \circ \gamma_g \circ \varphi^{-1}$ בכל בחירה.

ח. הוכיחו שאם $Z(G) = \{e\}$, אז $C_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Inn}(G)) = \{\mathrm{id}\}$ ובפרט מתקיים $Z(\mathrm{Aut}(G)) = \{\mathrm{id}\}$.

חבורת הקווטרניונים

שאלה 3. נסמן כמה איברים של החבורה $GL_2(\mathbb{C})$:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

שימו לב לא להתבלבל בתפקיד של 1 ושל i בתוך המטריצות שם הם מספרים מרוכבים, וכסימון למטריצות. נגדיר את חבורת הקווטרניונים להיות $Q = \langle i, j, k \rangle \leq GL_2(\mathbb{C})$.

א. בתאריך 16 באוקטובר 1843 חרט ויליאם רואן המילטון על גשר בְּרוּם

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

חשבו את טבלת הכפל של Q (עם הסברים קצרים). רמז: המילטון לא טעה, והחבורה סופית אחרי שמבינים שהאיברים הם רק $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$.

ב. הוכיחו שכל תת־החבורות של Q הן נורמליות (ואבליות, פרט ל-Q עצמה). רמז: בדקו מה יכול להיות האינדקס, ולמקרה היחיד שהוא קצת קשה העזרו בסעיף הקודם. כדאי להוסיף תרשים לסריג תת־החבורות של Q.

ג. הפריכו את הטענה הבאה: לכל חבורה אבלית A לחבורה $Q \times A$ יש רק תת־חבורות נורמליות. רמז: בחרו למשל את $A = \mathbb{Z}_4$ ותת־חבורה ציקלית מסוימת.

שאלה 4.

א. תהי G חבורה שחיתוך כל תת־החבורות הלא טריוויאליות שלה אינו טריוויאלי. כלומר

$$\bigcap_{\substack{H \leq G \\ H \neq \{e\}}} H \neq \{e\}$$

נניח כי G פועלת על קבוצה X עבורה $k = |X| < |G|$. הוכיחו שלא קיים שיכון $\varphi \colon G \to S_k$.

ב. הסיקו כי אין שיכון $\varphi \colon Q \to S_k$ לכל $k < 8$, עבור חבורת הקווטרניונים משאלה 3.

ג. מצאו באופן מפורש שיכון של Q ל-S_8, והוכיחו לאן עובר כל איבר.

שאלות רשות

הנה שאלה שקשורה לחומר שלמדנו על חבורת התמורות.

שאלה 5 (אתגר). צפו בפרק 10 בעונה 6 של הסדרה פיוצ'רמה.

א. רשמו את עשרים החילופים המתבצעים בפרק, ובדקו שמכפלתם היא אכן מכפלת הזהות. הדרכה: היו עקביים, ורשמו בכל מקרה את הגופים המחליפים זהויות או את הזהויות המחליפות גופים.

ב. נאמר שסדרת חילופים היא נאותה אם אף חילוף אינו מופיע בה יותר מפעם אחת. בפרק, פרופסור פארנסוורת' מצהיר שכל סדרה נאותה של חילופים על n עצמים אפשר להמשיך לסדרה נאותה על n העצמים ועוד שניים, כך שמכפלת כל החילופים היא הזהות. תנו דוגמה נגדית למשפט זה, אם מסתפקים ב-n העצמים ועוד אחד.

ג. נסו להוכיח את המשפט.
רמזים וספויילרים בסרטון הזה מאת Mathologer וברשומה הזאת בבלוג המומלץ "לא מדויק" של גדי אלכסנדרוביץ'.

בהצלחה!