תזכורת: בוחן בתורת הקבוצות יתקיים ביום ראשון בעוד שעה וחצי.
תזכורת נוספת: יש חובת הגשה לש"ב (בדיקה מדגמית).

אינדוקציה טרנספיניטית

תזכורת: בשביל להוכיח שטענה כלשהי נכונה על כל הסודרים, כלומר $P(\alpha)$ לכל סודר α, מספיק להוכיח את הבאים:

1. $P(0)$
2. $\forall\alpha\, P(\alpha)\to P(\alpha+1)$
3. לכל סודר גבולי β,

$$[\forall\alpha<\beta, P(\alpha)]\to P(\beta)$$

טענה: יהי α סודר, ו$A\subseteq\alpha$. אזי $otp(A)\leq\alpha$.
הוכחה: נוכיח באינדוקציה טרנספיניטית.
1. $\alpha=0$. כלומר, $\alpha=\emptyset$, אז $A=\emptyset$ ולכן $otp(A)=0$.
2. יהי α סודר, ונניח שהטענה נכונה לכל תת קבוצה של α. עכשיו אנחנו רוצים להוכיח שהטענה נכונה לכל תת קבוצה של $\alpha+1$.

כלומר, תהי $A\subseteq\alpha+1=\alpha\cup\{\alpha\}$.
נחלק למקרים:

א. $\alpha\notin A$. נובע מכך ש$A\subseteq\alpha$, ולכן מהנחת האינדוקציה $otp(A)\leq\alpha<\alpha+1$.
ב. $\alpha\in A$. נסמן $B=A\cap\alpha$. אז $B\subseteq\alpha$ ולכן $otp(B)\leq\alpha$. נשים לב שהקבוצה A שווה לקבוצה B, איחוד עם איבר שגדול ממש מכל איברי B. נסמן $otp(B)=\beta$. יהי f איזו סדר מB לβ. נבנה פונקציה $f':A\to\beta+1$

$$\forall b\in B f'(b)=f(b)$$

$$f'(\alpha)=\beta$$

קל לראות שזה איזו' סדר. לכן $otp(A)=\beta+1$. אנחנו יודעים ש$\alpha\leq\beta$, לכן $\beta+1\leq\alpha+1$.
3. יהי β סודר גבולי, ונניח שהטענה נכונה לכל $\alpha<\beta$. תהי $A\subseteq\beta$.

ניזכר בעובדה הבאה: במהלך ההוכחה שכל קבוצה סדורה היטב איזומורפית לסודר, האיזומורפיזם סדר בין A לטיפוס הסדר שלה, היה מוגדר באופן הבא, שכל איבר $a\in A$ נשלח לסודר שאיזומורפי ל$a\downarrow$.

יהי $a\in A$. בפרט $a\in\beta$. β סודר גבולי, זה אומר שאין בו איבר מקסימלי, ולכן לכל איבר בβ יש מישהו שגדול ממנו.

כלומר, קיים $\alpha\in\beta$ כך ש$a<\alpha$.
לכן $a\downarrow\subseteq\alpha$. אז מהנחת האינדוקציה, $otp(a\downarrow)\leq\alpha$. לכן אם נגדיר את

$$f:A\to otp(A)$$

אז

$$f(a)\leq\alpha$$

בפרט, כל האיברים ב$otp(A)$ קטנים ממש מβ.
כלומר, $\beta \notin otp(A)$. שקול: $\beta \not< otp(A)$. לכן $otp(A) \leq \beta$.
מסקנה: אם A וB קבוצות סדורות היטב, ו$f : A \to B$ פונקציה שומרת סדר , אז

$$otp(A) \leq otp(B)$$

הוכחה: $f[A] \cong A$ כי f שומרת סדר, ואם לוקחים רק את התמונה אז היא על התמונה.
$f[A] \subseteq B$.
יהי

$$g : B \to otp(B)$$

איזו סדר. אז

$$f[A] \cong g[f[A]]$$

כי g שומרת סדר, ואם מצמצים לתמונה זה גם על.

$$g[f[A]] \subseteq otp(B)$$

לכן

$$otp(g[f[A]]) \leq otp(B)$$

ומכיוון ש$A \cong g[f[A]]$, אז $otp(A) = otp(g[f[A]])$.
מסקנות:
1. לכל 3 סודרים α, β, γ מתקיים: $\alpha + \gamma \leq \alpha + \beta + \gamma$.
הוכחה: נגדיר פונקציה שומרת סדר

$$\alpha \times \{0\} \cup \gamma \times \{1\} \to \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\} \cup \gamma \times \{2\}$$

בצורה ברורה. ומהטענה הקודמת נקבל את הדרוש.
2. אם $\alpha_1 \leq \alpha_2$ ו$\beta_1 \leq \beta_2$ אז $\alpha_1 + \beta_1 \leq \alpha_2 + \beta_2$ וכן $\alpha_1\beta_1 \leq \alpha_2\beta_2$
הוכחה: בונים פונקציות שומרות סדר מקבוצות שטיפוס הסדר שלהן הוא הסודר בצד השמאלי של המשוואה, לקבוצות שטיפוס הסדר שלהן הוא הסודר בצד הימני של המשוואה.

חזקות סודרים

יהיו α, β סודרים.

$$^{\beta}\alpha = \{f : \beta \to \alpha\}$$

אוסף כל הפונקציות (בלי תכונה מסויימת, לא בהכרח שומרות סדר).

$$E(\beta, \alpha) = \{f : \beta \to \alpha || supp(f)| < \infty\}$$

$$supp(f) = \{x \in \beta : f(x) \neq 0\}$$

נגדיר יחס סדר על $E(\beta,\alpha)$ באופן הבא:
יהיו $f,g \in E(\beta,\alpha)$. נסמן ב

$$\Gamma(f,g) = \max\{x \in \beta : f(x) \neq g(x)\}$$

למה הוא קיים? כי f וg יכולות להיות שונות רק באיברים שלפחות אחת מהן לא שולחת ל0, ויש רק מספר סופי של איברים כאלה.

$$f < g \iff f(\Gamma(f,g)) < g(\Gamma(f,g))$$

נשים לב שזהו יחס סדר לינארי.
הגדרה:

$$\alpha^{\beta} = otp(E(\beta,\alpha))$$

בשביל שתהיה משמעות להגדרה, צריך להוכיח שהקבוצה סדורה היטב (לכל α,β).
במקום להוכיח ישירות שהיא סדורה היטב, נוכיח שהיא איזומורפית סדר לסודר.
נוכיח את זה באינדוקציה טרנספיניטית על β.
למעשה נוכיח:

1. $E(0,\alpha) \cong 1$.
2. נניח ש $E(\beta,\alpha)$ איזומורפי לסודר. נוכיח ש$E(\beta+1,\alpha) \cong E(\beta,\alpha) \times \alpha$
3. נניח שβ גבולי ולכל $\gamma < \beta$ $E(\gamma,\alpha)$ איזומורפי לסודר. נוכיח ש: $E(\beta,\alpha) \cong \sup\{otp(E(\gamma,\alpha)) : \gamma < \beta\}$

הוכחה:

1. 0 זה הקבוצה הריקה. יש פונקציה יחידה מקבוצה ריקה לכל קבוצה ריקה לכל קבוצה, הפונקציה הריקה היא אכן פונקציה עם תומך סופי.
2. נגדיר

$$F : E(\beta+1,\alpha) \to E(\beta,\alpha) \times \alpha$$

$$F(f) = (f|_{\beta}, f(\beta))$$

נשים לב שאם לf יש תומך סופי, אז גם $f|_{\beta}$ היא עם תומך סופי.
על: יהי $(g,\gamma) \in E(\beta,\alpha) \times \alpha$. המקור שלו:

$$f : \beta+1 \to \alpha$$

$$\forall x < \beta f(x) = g(x)$$

$$f(\beta)=\gamma$$

קיבלנו פונקציה עם תומך סופי.
שומרת סדר: נניח ש

$$f<g$$

נחלק למקרים:
אם $\Gamma(f,g)=\beta$ אז

$$F(f)\neq F(g)$$

ברכיב הימני. ונתון ש$f<g$, כלומר הרכיב הימני של $F(f)$ קטן מהרכיב הימני של $F(g)$, ולכן מהגדר הסדר המילוני הימני

$$F(f)<F(g)$$

אם $\Gamma(f,g)\in\beta$, אז ראשית נקבל ש$f(\beta)=g(\beta)$, כלומר, $F(f)$ ו$F(g)$ שוות ברכיב הימני.
כעת, $f|_\beta, g|_\beta$, הן פונקציות שונות, והאיבר הכי גדול שבו הן שונות, הוא בדיוק אותו איבר כמו של fוg. כלומר

$$\Gamma(f|_\beta,g|_\beta)=\Gamma(f,g)$$

ידוע ש$f<g$. כלומר,

$$f(\Gamma(f,g))<g(\Gamma(f,g))$$

נובע:

$$f|_\beta(\Gamma(f|_\beta,g|_\beta))<g_\beta(\Gamma(f|_\beta,g|_\beta))$$

ולכן $f|_\beta<g|_\beta$.
ולכן

$$F(f)<F(g)$$

3. גבולי:
נניח שβ גבולי ולכל $\gamma<\beta$ $E(\gamma,\alpha)$ איזומורפי לסודר לδ_γ. רוצים להוכיח ש$E(\beta,\alpha)\cong$ $\sup_{\gamma<\beta}\{\delta_\gamma\}$.
נגדיר

$$F_\gamma:E(\gamma,\alpha)\to E(\beta,\alpha)$$

$$F_\gamma(f)(x) = \begin{cases} f(x) & x < \gamma \\ 0 & x \geq \gamma \end{cases}$$

קל לראות שזאת פונקציה שומרת סדר.
נשים לב ש

$$E(\beta, \alpha) = \bigcup F_\gamma(E(\gamma, \alpha))$$

לשם הנוחות בואו נזהה את $E(\gamma, \alpha)$ עם התמונה שלו.

$$E(\beta, \alpha) = \bigcup E(\gamma, \alpha)$$

כעת מהנחת האינדוקציה יש פונקציה

$$G_\gamma : E(\gamma, \alpha) \to \delta\gamma$$

נגדיר פונקציה

$$G : E(\beta, \alpha) \to \bigcup_{\gamma < \beta} \delta_\gamma$$

לכל $f \in E(\beta, \alpha)$, קיים איזשהו $\gamma < \beta$ כך ש$f \in E(\gamma, \alpha)$. נגדיר

$$G(f) = G_\gamma(f)$$

צריך להוכיח שG מוגדרת היטב:
נניח ש$f \in E(\gamma', \alpha)$. בה"כ $\gamma < \gamma'$. אז ניתן להניח ש$E(\gamma, \alpha) \subseteq E(\gamma', \alpha)$ מאותו זיהוי שעשינו מקודם (מזהים פונקציה מγ לα עם פונקציה מγ' לα שאת שאר האיברים שולחים ל0).
למעשה זאת לא סתם תת קבוצה. זאת רישא. כי אם $f \in E(\gamma, \alpha)$ ו$g < f$, אז באיבר המקסימלי שבו הן שונות, התמונה של f יותר גדולה. כעת, מכיוון ש$f \in E(\gamma, \alpha)$, אז את כל האיברים שגדולים שווים לγ f שולחת ל0. לא ייתכן שיש איבר כזה שg שולחת למשהו שגדול מ0, כי אז האיבר המקסימלי שבו הן שונות יהיה מקבוצת האיברים שf שולחת ל0, ואז בהכרח g תשלח אותו לאיבר יותר גדולה, בסתירה לכך ש$g < f$. לכן $g \in E(\gamma, \alpha)$.
לכן הצמצום של הפונקציה

$$G_{\gamma'} : E(\gamma', \alpha) \to \delta_{\gamma'}$$

נותן את האיזו סדר

$$G_\gamma : E(\gamma, \alpha) \to \delta_\gamma$$

לכן $G_\gamma(f) = G_{\gamma'}(f)$.
על: כל איבר ב$\bigcup \delta_\gamma$ שייך לאיזשהו δ_γ, ולכן יש לו מקור תחת הפונקציה G_γ כי היא על. המקור שלו שייך ל$E(\gamma,\alpha)$ שמוכל ב$E(\beta,\alpha)$. לכן לכל איבר יש מקור ב$E(\beta,\alpha)$. (G שווה לG_γ על האיבר הזה)
שומרת סדר: יהיו $f < g$. יש γ_1 כך ש$f \in E(\gamma_1,\alpha)$ וγ_2 כך ש$g \in E(\gamma_2,\alpha)$, בה"כ $\gamma_1 \leq \gamma_2$. אז $f, g \in E(\gamma_2,\alpha)$. לכן

$$G(f) = G_{\gamma_2}(f), G(g) = G_{\gamma_2}(g)$$

ואנחנו יודעים ש G_{γ_2} שומרת סדר.
לסיכום: בנינו איזו סדר

$$E(\beta,\alpha) \to \bigcup \delta_\gamma = \sup\{\delta_\gamma\}$$

מסקנות:
1. לכל α

$$\alpha^0 = 1$$

2. לכל α, β

$$\alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha$$

3. לכל α סודר וβ סודר גבולי

$$\alpha^\beta = \sup_{\gamma<\beta}\{\alpha^\gamma\}$$

בתרגול/ ש"ב ראיתם:

$$\alpha^{\beta_1+\beta_2} = \alpha^{\beta_1}\alpha^{\beta_2}$$

$$(\alpha^{\beta_1})^{\beta_2} = \alpha^{\beta_1\beta_2}$$

משפט הארטוגס: תהי A קבוצה. קיים סודר θ שאין פונקציה חח"ע ממנו לA.
הוכחה: נסמן ב$F = \{\alpha | \{\alpha \to A$f: one to one f exists.
למשל $0 \in F$.
טענת עזר: F היא קבוצה טרנזיטיבית של סודרים.
הסבר: נניח ש$\alpha \in F$ ו$\beta < \alpha$. קיימת

$$f : \alpha \to A$$

חח"ע. $\alpha > \beta$ אומר ש$\beta \subseteq \alpha$, ולכן

$$f|_\beta : \beta \to A$$

לכן F סודר.

אם הייתה פונקציה חח"ע מF לA, אז היינו מקבלים $F \in F$. אבל ידוע שסודר לא שייך לעצמו.

לכן אין פונקציה חח"ע מF לA.

הערה: F הנ"ל הוא למעשה הסודר הכי קטן שמקיים שאין פונקציה חח"ע ממנו לA.

הוכחה: אם $\alpha < F$ אז $\alpha \in F$, ואז יש פונקציה חח"ע מα לA.

סימון: לכל קבוצה A אנחנו מסמנים את הסודר הראשון שאין פונקציה חח"ע ממנו לA ב$H(A)$.

משפט ההגדרה ברקורסיה

הגדרה: פונקציה חלקית מA לB היא פונקציה מתת קבוצה של A לB.

אוסף הפונקציות החלקיות מA לB מסומן:

$$Par(A, B) = \cup_{A' \subseteq A}^{A'} B$$

משפט ההגדרה ברקורסיה: תהי F פונקציה מ$F : Par(\theta, A) \to A$. אזי קיימת פונקציה יחידה $G : \theta \to A$ שמקיימת: $\forall \beta < \theta$

$$G(\beta) = F(G|_\beta)$$

הוכחה: לכל סודר $\gamma \leq \theta$ נגיד שפונקציה חלקית $g : \theta \to A$ היא "γ קירוב טוב" אם היא מקיימת שלכל $\beta < \gamma$

$$g(\beta) = F(g|_\beta)$$

ו$dom(g) = \gamma$.

למעשה אנחנו רוצים להוכיח שקיים θ קירוב טוב יחיד.

למעשה נוכיח קצת יותר:

נוכיח שלכל $\gamma \leq \theta$ יש γ קירוב טוב יחיד.

יחידות: נניח שg_1 וg_2 הם שני γ קירובים טובים. אנחנו רוצים להוכיח שהם שווים.

נניח שהם שונים. יהי β הסודר הראשון שבו הן שונות. כלומר $g_1(\beta) \neq g_2(\beta)$.

לכל $\delta < \beta$, $g_1(\delta) = g_2(\delta)$. כלומר,

$$g_1|_\beta = g_2|_\beta$$

בגלל שg_1 וg_2 הם γ קירובים טובים, הם מקיימים

$$g_1(\beta) = F(g_1|_\beta) = F(g_2|_\beta) = g_2(\beta)$$

סתירה.

כעת נוכיח באינדוקציה שלכל $\gamma \leq \theta$, קיים γ קרוב טוב.

הוכחה:

1. $\gamma = 0$ חייבים להגדיר

$$g(0) = F(g|_0) = F(\emptyset)$$

(כלומר 0 הולך לאן ש F שולחת את הפונקציה הריקה)

2. נניח שקיים γ קירוב טוב, נקרא לו g. ונוכיח שקיים $\gamma + 1$ קירוב טוב. נגדיר

$$g' : \gamma + 1 = \gamma \cup \{\gamma\} \to A$$

$$g'|_\gamma = g$$

$$g'(\gamma) = F(g'|_\gamma) = F(g)$$

וקל לראות שg' הוא אכן γ קירוב טוב.

3. נניח שγ סודר גבולי ולכל $\beta < \gamma$ קיים β קירוב טוב, g_β.

נגדיר $g : \gamma \to A$ באופן הבא. יהי $x \in \gamma$. בגלל שγ גבולי, קיים $\beta < \gamma$ כך ש$x < \beta$. נגדיר

$$g(x) = g_\beta(x)$$

צריך להוכיח שזה מוגדר היטב. נניח ש$x < \beta'$. רוצים להוכיח ש$g_\beta(x) = g_{\beta'}(x)$. בה"כ $\beta < \beta'$.

נשים לב ש$g_{\beta'}|_\beta$ נקבל β קרוב טוב. בגלל שהוכחנו שקירוב טוב הוא יחיד, אז

$$g_{\beta'}|_\beta = g_\beta$$

ולכן

$$g_\beta(x) = g_{\beta'}(x)$$

נותר להוכיח שg היא אכן γ קירוב טוב. יהי $\beta < \gamma$, צריך להוכיח ש

$$g(\beta) = F(g|_\beta)$$

מכיוון ש γ גבולי, $\beta < \beta + 1 < \gamma$. לכן $g(\beta) = g_{\beta+1}(\beta)$, וכן $g|_\beta = g_{\beta+1}|_\beta$. וידוע ש$g_{\beta+1}$ הוא $\beta + 1$ קירוב טוב.

הערה: אפשר להוכיח טענה מקבילה על קבוצות סדורות היטב במקום סודרים. כלומר, אם A קבוצה סדורה היטב וB קבוצה כלשהי, ו$F : Par(A, B) \to B$, אז קיימת ביחידות $G : A \to B$ כך שלכל $a \in A$

$$G(a) = F(G|_{a\downarrow})$$

אקסיומות ZF של תורת הקבוצות

(אקסיומות צרמלו- פרנקל)

השפה של תורת הקבוצות מורכבת משני יחסים בינריים : $=$ ו $\in$. בנוסף מהקשרים הלוגיים : גרירה, או, וגם, שלילה. ומכמתים. (לכל וקיים). (באמצעות גרירה ו"וגם" ניתן להגדיר גרירה דו כיוונית)

באמצעות ניתן להגדיר את יחס ההכלה : הפסוק הבא יבטא את העובדה שA מוכל בB

$$\varphi(x,y) = [\forall a : a \in x \to a \in y]$$

כלומר $\varphi(A,B)$ אומר ש$A \subseteq B$.

אקסיומת הקבוצה הריקה :

$$\exists A : [\forall a : \neg(a \in A)]$$

במילים : קיימת קבוצה ריקה.

2. אקסיומת ההקפיות :

$$\forall A, \forall B[A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

מסקנה : יש רק קבוצה ריקה אחת.

3. אקסיומת הזיווג :

$$\forall x \forall y, \exists z : [\forall a : a \in z \iff (a = x) \vee (a = y)]$$

במילים פשוטות : לכל x, y קיימת הקבוצה $\{x, y\}$.

הערה : אפשר לקחת $x = y$. ולכן אם x קבוצה אז $\{x\}$ קבוצה.

מ1 ו3 ניתן לבנות את הקבוצות :

$$\{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$