מבוא לטופולוגיה - תרגיל 12 (פתרון)

<u>שאלה 1</u>

יהי (M_1, d_1) , (M_2, d_2) מרחבים מטריים.
ראינו בכיתה שהפונקציה $d: M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי נוסחה:

$$d\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$$

מקיימת אקסיומות מטריקה ולכן מאפשרת לראות $(M_1 \times M_2, d)$ כמרחב מטרי.
נסמן ב-τ את הטופולוגיה המושרת בקבוצה $M_1 \times M_2$ על ידי המטרוקה d. הבסיס הטבעי $\mathfrak{B}$ של הטופולוגיה הזאת מורכב מכדורים:

$$\mathfrak{B} = \left\{B\big((a_1, a_2), r\big) \middle| a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r > 0\right\}$$

נסמן ב-$\tau_\times$ טופולוגית המכפלה במרכב $(M_1, d_1) \times (M_2, d_2)$. אחד מהבסיסים הקיימים לטופולוגיה הזאת מורכב ממכפלות:

$$\boldsymbol{\mathfrak{B}_\times = \{B_1(a_1, r_1) \times B_2(a_2, r_2) | a_1 \in M_1, a_2 \in M_2, r_1, r_2 > 0\}}$$

(כאן $B_1(a_1, r_1), B_2(a_2, r_2)$ כדורים במטריקות d_1, d_2 בהתאם.)
בהשתמש את שני הבסיסים. <u>הוכיחו</u> ש-$\tau = \tau_\times$.

<u>הוכחה</u>

<u>$\tau \subseteq \tau_\times$</u>.

$$B\big((a_1, a_2), r\big) =$$
$$\left\{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 \middle| d\big((x_1, x_2), (a_1, a_2)\big) < r\right\} =$$
$$\{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 | d_1(x_1, a_1) < r \wedge d_2(x_2, a_2) < r\} =$$

$\{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 | x_1 \in B_1(a_1, r) \wedge x_2 \in B_2(a_2, r)\} =$
$B_1(a_1, r) \times B_2(a_2, r) \in \mathfrak{B}_\times \subseteq \tau_\times \quad (*)$

לכן $\mathfrak{B} \subseteq \tau_\times$ ואזי $\tau \subseteq \tau_\times$.■

<u>$\tau_\times \subseteq \tau$</u>.

יהי $(a_1, a_2) \in U \in \tau_\times$. אזי קיימים כדורים $B_1(a_1, r_1) \subseteq M_1$ ו-$B_2(a_2, r_2) \subseteq M_2$ כך ש-
$U \supseteq B_1(a_1, r_1) \times B_2(a_2, r_2) \ni (a_1, a_2)$ כי $\mathfrak{B}_\times$ הוא בסיס של $\tau_\times$ (ההגדרה 2 של בסיס המכפלה).

עכשיו נגדיר: $r = \min\{r_1, r_2\}$ ו-

$$B' = \{(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2 | d_1(x_1, a_1) < r \wedge d_2(x_2, a_2) < r\}$$

מקבלים (הפירוט אפשר לראות ב-(*)):

$$(a_1, a_2) \in B' = B_1(a_1, r) \times B_2(a_2, r) \subseteq$$
$$B_1(a_1, r_1) \times B_2(a_2, r_2) \subseteq U$$

כלומר,

$$(a_1, a_2) \in B' \subseteq U$$

וחוץ מזה:

$$B' = B\big((a_1, a_2), r\big) \in \tau$$

אנחנו רואים שהנקודה האקראית $(a_1, a_2) \in U$ היא נקודה פנימית ב-U ביחס לטופולוגיה τ. אזי $U \in \tau$. כלומר, הנחנו ש- $U \in \tau_\times$ וקיבלנו ש-$U \in \tau$. ■

<u>שאלה 2</u>

יהיו Y, X מ"ט ותהי $f: X \to Y$ פונקציה רציפה .הגרף של f הוא תת-מרחב של $X \times Y$ המוגדר באופן הבא: $\Gamma_f =$ $\{\big(x, f(x)\big) \in X \times Y\}$.

<u>הכיחו</u> ש-X הומאומורפי ל- Γ_f .

הוכחה

נגדיר $g\colon X \to \Gamma_f$ כך ש-$g(x) = (x, f(x))$.

הפונקציה היא פונקצחה הפיכה:

$g \circ p_X|_{\Gamma_f} = Id_{\Gamma_f}$ ו- $p_X|_{\Gamma_f} \circ g = Id_X$ כאשר p_X היא ההטעלה $p_X\colon X \times Y \to X$. (קל לבדוק את השוויונות נקודה-נקדה).

$g^{-1} = p_X|_{\Gamma_f}$ רציפה כצמצום של ההטעלה שהיא רצחפה (ההרצאות).

נשאר להוכיח ש-g רציפה. לנוחות, במקום g נתבונן בפונקציה $h\colon X \to X \times Y$ כך ש- $h|^{\Gamma_f} = g$ (צמצום התווח) ונוכיח את רציפותה של h בכל נקודה.

תהי $a \in X$. אז כוון ש-f רציפה, לכל סביבה $U \subseteq X$ המכילה את a קיימת סביבה $V \subseteq Y$ של $f(a)$ כך ש- $f(U) \subseteq V$. קל לבדוק שזה גורר: לכל סביבה $U \subseteq X$ המכילה את a קיימת סביבה

$W = U \times V \subseteq X \times Y$ של $h(a)$ כך ש- $h(U) \subseteq W$ (כאן W פתוחה לפי הגדרת טופולוגית המכפלה).

אז h רציפה , g רציפה כי התקבלה בצמצום טווח, ואז היא הותאומורפיזמי מש"ל.

שאלה 3

יהיו Y, X מרחבים טופולוגיים ו-Y - מרחב קומפקטי.

א) הוכיחו שההטעלה $p_X\colon X \times Y \to X$ היא פונקציה סגורה.

<u>הוכחה</u>

תהי $H \subseteq X \times Y$ קבוצה סגורה. נתבונן בנודה כלשהי $x \notin$ $p_X(H)$ ונוכיח שהיא פנימית ב-$p_X(H)^c$. בשביל זה נשים לב ש-

$$x \notin p_X(H) \Rightarrow \{x\} \times Y \cap H = \emptyset \qquad (1)$$

(2) $\{x\} \times Y$ קומפקטי (ההרצאות) .

מ-(1) נובע שלכל $y \in Y$: $(x, y) \notin H$, וכוון ש- H קבוצה סגורה, לכל $y \in Y$ קיימת סביבה $U_y \times V_y$ של הנקודה (x, y) כך ש-

$$U_y \times V_y \cap H = \emptyset. \qquad (3)$$

אז $\{U_y \times V_y\}_{y \in Y}$ כיסוי פתוח של תת-מרחב $\{x\} \times Y$ אשר קומפקטי לפי (2). לכן קימות נקודות $y_1, \dots, y_n \in Y$ כך ש-

$\{x\} \times Y \subseteq U_{y_1} \times V_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_n} \times V_{y_n}$ ו-

$U_{y_i} \times V_{y_i} \cap H = \emptyset$ לכל $1 \le i \le n$.מזה נובע ש-$Y = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. נקח $U = \cap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. אזי U- פתוחה, $x \in U$ ו-

$$U \times Y \cap H = \emptyset. \qquad (4)$$

זה אומר ש-$U \cap p_X(H) = \emptyset$ (כי אחרת היה קיים זוג $(u, y) \in H$ כך ש-$u \in U$ ו-$y \in Y$ וזה היה סותר ל-(4)).
אז נקודה x פנימית ב-$p_X(H)^c$, מש"ל.

ב) תהי $f: X \to Y$ פונקציה. <u>הוכיחו</u> שאם *הגרף* $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in X \times Y\}$ קבוצה סגורה ב-$X \times Y$,
אזי f פונקציה רציפה.

<u>הוכחה</u>

תהי F תת-קבוצה סגורה ב-Y. אזי
$f^{-1}(F) = p_X(\Gamma_f \cap X \times F)$ (קל לבדוק את ההכלה הדו-כיוונית נקודה-נקודה). מכאן: $X \times F$ סגורה כמכפלה של שתי סגורות (תרגיל הבית הקודם). Γ_f סגורה לפי התנאי. אז $\Gamma_f \cap X \times F$ סגורה כחיתוך סגורות. ו-$p_X(\Gamma_f \cap X \times F)$ סגורה לפי "א)". קבלנו: תמונה הפוחה של קבוצה סגורה היא קבוצה סגורה, לכן f – רציפה, מש"ל.

<u>שאלה 4</u>
יהיו $X_1, \ldots, X_n$ מ"ט קומפקטיים. <u>הוכיחו</u> שהמרחב $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ קומפקטי.

<u>הוכחה</u>
אפשר לראות את המ"ט $X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$ כ- $\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} X_i'$ כאשר X_i' תת-מרחב הומאומורפי ל-X_i ולכן גם קומפקטי. בנוסף, X_i' - קבוצה פתוחה ב-$X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n$.
נשאר להוכיח שאחוד סופי של תת-מרחבים קומפקטיים.
מספיק לעשות את זה לשני מרחבים כי לאחר מכן קל להמשיך לפי אינדוקציה.
יהי $Z = X \dot{\cup} Y$. יהיו X, Y קבוצות קומםקטיות ויהי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי פתוח של Z . אז הוא גם כיסוי פתוח של X ושל Y (ככיסוי של תת-קבוצות) . לכן הוא מכיל כיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_1}$ של X וכיסוי פתוח סופי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_2}$ של Y ($F_1, F_2 \subseteq I$ – קבוצות אינדקסים סופיות) . אזי $\{W_\alpha\}_{\alpha \in F_1 \cup F_2 \subseteq I}$ תת-כיסוי סופי של Z . לכן Z קומפקטי.
בעזרת אותה לוגיקה מקבלים באינדוקציה ש-

$X_1 \sqcup \ldots \sqcup X_n = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} X_i'$ מ"ט קומפקטי, מש"ל.

<u>שאלה 5</u>

יהיו X, Y, Z מרחבים טופולוגיים. נגדיר יחס '~' על מרחב המכפלה $X \times Y \times Z$ כך ש-$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow x = x' \wedge z = z'$.

<u>הוכיחו:</u>

א) '~' יחס שקילות;

ב) $(X \times Y \times Z)/\sim$ הומאומורפי ל-$X \times Z$.

<u>הוכחה</u>

א) התכונות רפלקסיביות, סימטריות וטרנזיטיביות נבדקות בקלות על ידי בדיקה ישירה.

ב) נוכיח שפונקציה $p: X \times Y \times Z \to X \times Z$, המוגדרת על ידי נוסחה $p(x, y, z) = (x, z)$, מכבדת מאד את היחס '~':

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow x = x' \wedge z = z' \Leftrightarrow$$
$$(x, z) = (x', z')$$

אבל $p(x, y, z) = (x, z)$ ו- $p(x', y', z') = (x', z')$.

לכן: $(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow p(x, y, z) = p(x', y', z')$

נסמן ב-ρ את העתקה הקנונית $\rho: X \times Y \times Z \to X \times Y \times Z/\sim$. מכוון ש-$p$ <u>מכבדת מאד</u> את ~, לפי ההרצאה האחרונה, קיימת פונקציה $\hat{p}: X \times Y \times Z/\sim \to X \times Z$ כך ש-$p = \hat{p} \circ \rho$ כאשר $\hat{p}$ – חח"ע ועל.

אם U פתוחה ב-X, V פתוחה ב-Y ו- W פתוחה ב- Z, אזי $p(U \times V \times W) = U \times W$ פתוחה ב - $X \times Z$, ו- $p^{-1}(U \times W) = U \times Y \times W$ פתוחה ב-$X \times Y \times Z$.

לפי הגדרת טופולוגית המכפלה ולפי כמה משפטים מההרצאות

לגבי בסיס, זה מוכיח ש- p פונקציה רציפה ופתוחה. לפי משפט מההרצאה גם $\hat{p}$ רציפה.

נוכיח ש-$\hat{p}$ פתוחה. תהי $\hat{T} \subseteq X \times Y \times Z/\sim$ פתוחה במרחב המנה. אזי $T = \rho^{-1}(\hat{T})$ פתוחה ב-$X \times Y \times Z$. לכן $p(T) = \hat{p}\big(\rho(T)\big) = \hat{p}(\hat{T})$ פתוחה כי הוכחנו ש-p פתוחה. אז $\hat{p}$ פתוחה, רציפה, חח"ע ועל. אזי $\hat{p}$ הומאומורפיזם, מש"ל.