מבוא לטופולוגיה – תרגיל 3 (פתרון)

שאלה 1

נסמן ב-$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ סדרת מספרים ממשיים שאיבר ה-n שלה הוא מספר x_n.

תהי l_∞ קבוצה של כל הסדרות הממשיות החסומות, ז"א,

$$l_\infty = \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\,, x_n \in \mathbb{R} \middle| \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n| < \infty \right\}$$

א' תוכיחו שפונקציה $d: l_\infty \times l_\infty \to [0,\infty)$ כאשר

$$d_\infty((x_n)\,,(y_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n|\},$$

מהווה מטריקה על l_∞.

הוכחה

1. $$(x_n) = (y_n) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: x_n = y_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}: |x_n - y_n| = 0$$
$$\Leftrightarrow d_\infty((x_n)\,,(y_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| = 0$$

2. $$d_\infty((x_n)\,,(y_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| =$$
$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n - x_n| = d_\infty((y_n)\,,(x_n)\,)$$

3. $$d_\infty((x_n)\,,(z_n)\,) = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - z_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n + y_n - z_n|$$
$$\le \sup_{n\in\mathbb{N}}(|x_n - y_n| + |y_n - z_n|) \le \sup_{n\in\mathbb{N}}|x_n - y_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}}|y_n - z_n| =$$
$$d_\infty((x_n)\,,(y_n)\,) + d_\infty((y_n)\,,(z_n)\,).$$

ב' תוכיחו שתתקבוצה $F \subseteq l_\infty$ כאשר:

$$F = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \in l_\infty \mid \{i \in \mathbb{N} | x_i \ne 0\} \text{ קבוצה סופית } \}$$

היא תתקבוצה לא סגורה במ"מ (l_∞, d_∞).

__הוכחה__

נסמן ב- σ^k את הסדרה $\left(1,\frac{1}{2},\dots\frac{1}{k},0,0,\dots\right)$ -כל האיברים חוץ מ-$\boldsymbol{k}$ הראשונים אפסיים. נסמן ב- s את הסדרה $\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots\frac{1}{n},\dots\right)=(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$
(זאת אומרת, $s_n=\frac{1}{n}$) .

אז $d(\sigma^k,s)=\sup(0,\dots,0,\frac{1}{k},\frac{1}{k+1},\dots))=\frac{1}{k}$, ($k-1$ אפסים לפני $\frac{1}{k}$).

אזי $d(\sigma^k,s)=\frac{1}{k}\to 0$ כאשר $k\to\infty$ ולכן $\sigma^k\to s$. אבל $\sigma^k\in F, s\notin F$ לפי הגדרתם. $\Leftarrow$ F לא סגורה .

__שאלה 2__

__א'__ יהיו M_1,M_2 מרחבים מטריים. תהי פונקציה $f\colon M_1\to M_2$ רציפה ו-$F\subseteq M_2$ קבוצה סגורה. תוכיחו שהקבוצה $f^{-1}(F)\subseteq M_1$ סגורה.

__הוכחה__

F – סגורה, אזי F^c – פתוחה, אז $f^{-1}(F^c)$ – פתוחה כיוון ש-f רציפה.
לכן $\left(f^{-1}(F^c)\right)^c$ – סגורה. אבל מתורת הקבוצות: $\left(f^{-1}(F^c)\right)^c=f^{-1}(F)$ ■

__ב'__ תוכיחו שהקבוצה $\Delta=\{(x,x)\in\mathbb{R}^2|\,x\in\mathbb{R})\}$ סגורה במרחב אוקלידי $\mathbb{R}^2$.

__הוכחה__

תהי $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ פונקציה כך ש-$f\big((x,y)\big)=|x-y|$. נעבוד בינתיים ב מטריקות d_∞ בשני המרחבים $\mathbb{R}^2$ ו-$\mathbb{R}$.
נוכיח ש- f רציפה ונעשה את זה בעזרת קריטריון הסדרות. תהי $p_n\to p$ ב-$\mathbb{R}^2$. יהיו (x_n,y_n) קואורדינטות של הנקודה p_n ו- (x,y) קואורדינטות של הנקודה p. אזי:

$$p_n\to p\ \Leftrightarrow d_\infty(p_n,p\,)\to 0\Leftrightarrow \max\{|x_n-x|,|y_n-y|\}\to 0\Leftrightarrow$$
$$|x_n-x|\to 0\wedge|y_n-y|\to 0\ .$$

אזי:

$$d_\infty(f(p_n),f(p))=|f(p_n)-f(p)|=\big||x_n-y_n|-|x-y|\big|$$
$$\le|(x_n-x)-(y_n-y)|\to 0\Rightarrow d_\infty(f(p_n),f(p))\to 0$$

ז"א, $p_n\to p\ \Rightarrow f(p_n)\to f(p)$, ולכן f-רציפה. כיוון שהנקודון $\{0\}$ סגור ב-$\mathbb{R}$, הקבוצה $\Delta=\{(x,x)\in\mathbb{R}^2|\ x\in\mathbb{R})\}=f^{-1}(\{0\})$ - סגורה – בינתיים ביחס למטריקה d_∞. אבל d_∞ שקולה למטריקה אוקלידית, לכן Δ סגורה גם במישור האוקלידי.■

שאלה 3.

תוכיחו שהמרחב המטרי (M,d_{0-1}) קומפקטי אם ורק אם M קבוצה סופית.

הוכחה

$\Leftarrow$. יהיה M קומפקטי. ניקח אוסף הכדורים $\left\{B\left(x,\frac{1}{2}\right)\subseteq M\middle|\ x\in M\right\}$. ברור שזה כיסוי פתוח של M. כיוון ש- M קומפקטי, קיים תתכיסוי סופי כך ש-
$M=B\left(x_k,\frac{1}{2}\right)\cup\ldots\cup B\left(x_1,\frac{1}{2}\right)$. במטריקה d_{0-1} המרחק בין שתי נקודות שונות שווה ל- 1. לכן הכדור $B\left(x_i,\frac{1}{2}\right)$ מכיל רק את הנקודה x_i. ז"א:

$M=\{x_k\}\cup\ldots\cup\{x_1\}$■ .

$\Rightarrow$.

יהיה M סופי, ז"א, $M=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$. יהיה $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של M.

אזי לכל i $(1\le i\le k)$ קיים $\alpha_i\in I$ כך ש- $x_i\in U_{\alpha_i}$.

לכן $M=U_{\alpha_k}\cup\ldots\cup U_{\alpha_1}$, ו-M קומפקטי.■

שאלה 4.

א' תוכיחו שאם $A\subseteq M$ תתקבוצה סגורה במ"מ M קומפקטי, אז תתמרכב A הוא מ"מ קומפקטי .

הוכחה

יַהיה $\{U_\alpha\}_I$ כיסוי פתוח של תתמרחב A. זה אומר ש-$A=\cup_{\alpha\in I} U_\alpha$ ושלכל $\alpha \in I$: $U_\alpha \subseteq A$ פתוחה ב-A. מזה נובע שלכל $\alpha \in I$ קיימת קבוצה $V_\alpha \subseteq M$ פתוחה ב-M כך ש- $U_\alpha = V_\alpha \cap A$. כיוון ש-$A$ סגורה ב-M, A^c פתוחה ב-M. אנחנו מקבלים: $A = \cup_\alpha U_\alpha = \cup_\alpha (V_\alpha \cap A) = (\cup_\alpha V_\alpha) \cap A$.

לכן: $A \subseteq \cup_\alpha V_\alpha$ ולכן $M = A \cup A^c \subseteq (\cup_\alpha V_\alpha) \cup A^c$.

ז"א, $\mathfrak{C} = \{V_\alpha\}_I \cup \{A^c\}$ כיסוי פתוח של M כולו. מקומפקטיות נובע שהוא מכיל תתכיסוי סופי של M. ז"א קיימים אינדקסים $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ כך

ש-$M = V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_k} \cup A^c$. לכן:

$A = A \cap M = A \cap \left(V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_k} \cup A^c\right)$. אבל:

$$A \cap \left(V_{\alpha_1} \cup \dots \cup V_{\alpha_k} \cup A^c\right) = \left(A \cap V_{\alpha_1}\right) \cup \dots \cup \left(A \cap V_{\alpha_k}\right) \cup (A \cap A^c) =$$

$$U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k} \cup \emptyset = A.$$

ז"א, $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ תתכיסוי סופי המוכל ב-$\{U_\alpha\}_I$. לכן A קומפקטי.■

ב' תוכיחו שאם תתקבוצה $U \neq \emptyset$ פתוחה במרחב אוקלידי $\mathbb{R}^n$ אז תתמרחב U אינו קומפקטי.

הוכחה

נניח – בשלילה – ש-U–קומפקטי . לכן U סגורה וחסומה. נעבוד במטריקה d_∞. כיוון ש-$U \neq \emptyset$ קיימת נקודה $a = (a^1, a^2, \dots, a^n) \in U$. נסמן :

$R = \sup\{x^1 | (x^1, a^2, \dots, a^n) \in U\}$. הקבוצה בסוגריים מסולסלים מכילה את

a^1 וחסומה (כי U חסומה). לכן המספר R מוגדר היטב ו- $R < \infty$.

לפי הגדרת חסם עליון לכל $k \in \mathbb{N}$ קיים x_k^1 כך ש- $(x_k^1, a^2, \dots, a^n) \in U$

ו- $R - \frac{1}{k} < x_k^1 \leq R$. לכן $(x_k^1, a^2, \dots, a^n) \to (R, a^2, \dots, a^n)$. אזי $(R, a^2, \dots, a^n) \in U$ כי U סגורה. אבל U גם פתוחה, לכן קיים $r > 0$ כך

ש-$B_\infty((R,a^2,\dots,a^n),r) \supseteq U$. בפרט: $\left(M+\frac{r}{2},a^2,\dots,a^n\right) \in U$ וזה סותר להגדרה של R.

הערה. שימו לב! במקרה $n=1$ ההוכחה נשארת להיות נכונה ורק הקואורדינטות $a_2,\dots,a_n$ נעדרות.

שאלה 5.

יהיו ρ_1,ρ_2 שתי מטריקות שקולות על M.
תוכיחו: (M,ρ_1) קומפקטי $\Leftrightarrow$ (M,ρ_2) קומפקטי.

הוכחה

האוסף של קבוצות פתוחות ביחס ל-ρ_1 זהה לאוסף של קבוצות פתוחות ביחס ל-ρ_2. לכן כיסוי פתוח ביחס ל-ρ_1 אם ורק אם הוא כיסוי פתוח ביחס ל-ρ_2 . אזי לפי הגדרת קומפקטיות:
(M,ρ_1) קומפקטי $\Leftrightarrow$ (M,ρ_2) קומפקטי, מצ"ל.