

פתרון תרגיל 1 – לינארית

1. חשבו את המספרים המרוכבים הבאים:

$$1.1. \frac{10-3i}{7-4i} - \frac{10-3i}{2i}$$

פתרון:

$$\begin{aligned} \frac{10-3i}{7-4i} - \frac{10-3i}{2i} &= \frac{10-3i}{7-4i} \cdot \frac{7+4i}{7+4i} - \frac{10-3i}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} = \frac{70-21i+40i-12i^2}{7^2+4^2} - \frac{-20i+6i^2}{2^2} = \\ &= \frac{70+19i+12}{65} - \frac{-20i-6}{4} = \frac{82+19i}{65} - \frac{-20i-6}{4} = 1\frac{17}{65} + \frac{19}{65}i + 5i + \frac{3}{2} = 2\frac{99}{130} + 5\frac{19}{65}i \end{aligned}$$

$$1.2. \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-25}$$

פתרון: ראשית נעביר את $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ להצגה פולרית.

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\theta = 60^\circ \quad \text{or} \quad \theta = 240^\circ$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ נמצא ברביע הראשון לכן הזווית המתאימה היא } \theta = 60^\circ$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1\text{cis}60^\circ = \text{cis}60^\circ \quad \text{ו}$$

לכן, לפי משפט דה מואבר:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-25} &= (\text{cis}60^\circ)^{-25} = \text{cis}(-25 \cdot 60^\circ) = \text{cis}(-60^\circ) = \cos(-60^\circ) + \sin(-60^\circ)i \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$1.3. \left(\frac{5}{2+i}\right)^6$$

$$\frac{5}{2+i} = \frac{5}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{10-5i}{4+1} = 2-i \quad \text{נשים לב } \frac{5}{2+i}$$

נעביר את $2-i$ להצגה פולרית.

$$r = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{2} \Rightarrow$$

$$\theta = -26.57^\circ \quad \text{or} \quad \theta = 153.43^\circ$$

$2 - i$ נמצא ברביע הרביעי לכן הזווית המתאימה היא $\theta = -26.57^\circ$

$$\frac{5}{2+i} = 2 - i = \sqrt{5} \operatorname{cis}(-26.57^\circ) \quad \text{ו}$$

לכן, לפי משפט דה מואבר:

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{2+i} \right)^6 &= (\sqrt{5} \operatorname{cis}(-26.57^\circ))^6 = \sqrt{5}^6 \operatorname{cis}(6 \cdot -26.57^\circ) = 125 \operatorname{cis}(-159.39^\circ) \\ &= 125(\cos(-159.39^\circ) + \sin(-159.39^\circ)i) = 125(-0.936 - 0.352i) = -117 - 44i \end{aligned}$$

2. פתרו את המשוואות הבאות ומצאו את המספר המרוכב z :

$$\frac{z-3}{iz+1} = 2 \quad \text{2.1}$$

פתרון: ראשית נמצא תחום הגדרה:

$$iz + 1 \neq 0$$

$$iz \neq -1$$

$$z \neq -\frac{1-i}{i-i}$$

$$z \neq i$$

כעת, נפתור את המשוואה:

$$\frac{z-3}{iz+1} = 2$$

$$z-3 = 2(iz+1)$$

$$z-3 = 2iz+2$$

$$z-2iz = 5$$

$$z(1-2i) = 5$$

$$z = \frac{5}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{5+10i}{1+4} = 1+2i$$

הפתרון שמצאנו נמצא בתוך תחום ההגדרה לכן $z = 1+2i$ הוא פתרון המשוואה.

$$\overline{iz} + 2z = \overline{-1-2i} \quad \text{2.2}$$

פתרון: נסמן $z = a+bi$ אזי $\bar{z} = a-bi$.

נציב במשוואה ונפתור:

$$\begin{aligned}\overline{iz} + 2z &= \overline{-1 - 2i} \\ \bar{i}\bar{z} + 2z &= -1 + 2i \\ -i(a - bi) + 2(a + bi) &= -1 + 2i \\ -ai + bi^2 + 2a + 2bi &= -1 + 2i \\ -ai - b + 2a + 2bi &= -1 + 2i \\ (2a - b) + (-a + 2b)i &= -1 + 2i\end{aligned}$$

לפי יחידות ההצגה יתקיים שוויון בין שני האגפים, אם ורק אם החלק הממשי שלהם שווה והחלק המדומה שלהם שווה.

לכן, המשוואה הנ"ל שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2a - b = -1 \\ -a + 2b = 2 \end{cases}$$

$$I) b = 2a + 1$$

$$II) -a + 2(2a + 1) = 2$$

$$-a + 4a + 2 = 2$$

$$3a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$I) b = 1$$

לכן פתרון המשוואה הנתונה הוא $z = 0 + 1i$, כלומר $z = i$.

$$\overline{z\bar{z}} + z^2 = 2 + z - \bar{z} \quad \mathbf{2.3}$$

פתרון: נסמן $z = a + bi$ אזי $\bar{z} = a - bi$.

נציב במשוואה ונפתור:

$$\overline{z\bar{z}} + z^2 = 2 + z - \bar{z}$$

$$\overline{z\bar{z}} + z^2 = 2 + z - \bar{z}$$

$$\overline{z\bar{z}} + z^2 = 2 + z - \bar{z}$$

$$|z|^2 + z^2 = 2 + 2\operatorname{Im}(z)i$$

$$a^2 + b^2 + (a + bi)^2 = 2 + 2bi$$

$$a^2 + b^2 + a^2 + 2abi - b^2 = 2 + 2bi$$

$$2a^2 + 2abi = 2 + 2bi$$

לפי יחידות ההצגה יתקיים שוויון בין שני האגפים, אם ורק אם החלק הממשי שלהם שווה והחלק המדומה שלהם שווה.

לכן, המשוואה הנ"ל שקולה למערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 2a^2 = 2 \\ 2ab = 2b \end{cases}$$

$$I) a^2 = 1$$

$$\begin{array}{l|l} a = 1 & a = -1 \\ II) 2b = 2b & II) -2b = 2b \\ 0 = 0 & 4b = 0 \\ \forall b & b = 0 \\ z = 1 + bi, \forall b & z = -1 \end{array}$$

לכן פתרונות המשוואה הנתונה הם $z = 1 + bi$ ו $z = -1$ לכל b ממשי.

3.

3.1. הוכיחו כי לכל z, z_1, z_2 מרוכבים מתקיים:

$$3.1.1. |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$$

הוכחה: נסמן $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$. אזי:

$$\begin{aligned} |z_1 z_2| &= |(a + bi)(c + di)| = |(ac - bd) + (ad + bc)i| = \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 c^2 - 2acbd + b^2 d^2 + a^2 d^2 + 2adbc + b^2 c^2} = \sqrt{a^2 c^2 + b^2 d^2 + a^2 d^2 + b^2 c^2} = \\ &= \sqrt{a^2(c^2 + d^2) + b^2(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{(a^2 + b^2)} \sqrt{(c^2 + d^2)} = |z_1| |z_2| \end{aligned}$$

$$3.1.2. z\bar{z} = |z|^2$$

הוכחה: נסמן $z = a + bi$, אזי:

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = |z|^2$$

3.2. נתון כי $z = rcis\theta \neq 0$. מצאו את ההצגה הקוטבית של המספרים הבאים:

$$3.2.1. |z|$$

$$\text{פתרון: נשים לב: } |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$$

לכן, עלינו להציג את המספר $r = r + 0i$ בצורה קוטבית.

ברור, כי המרחק של $(r, 0)$ מ $(0, 0)$ הוא r .

כמו כן, $r = r + 0i$ נמצא על הציר הממשי מימין ל $(0, 0)$, לכן, הזווית המתאימה לו היא 0°

בסה"כ ההצגה הקוטבית שלו היא $r = rcis(0^\circ)$. לכן $|z| = rcis(0^\circ)$

$$3.2.2. \bar{z}$$

פתרון: ב 3.1.2 הוכחנו כי $z\bar{z} = |z|^2$. מכיוון ש $z \neq 0$ ניתן לחלק בו. נקבל: $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$ לכן

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{(rcis(0^\circ))^2}{rcis\theta} = \frac{r^2 cis(2 \cdot 0^\circ)}{rcis\theta} = \frac{r^2 cis(0^\circ)}{rcis\theta} = rcis(0 - \theta) = rcis(-\theta)$$

4. פתרו את המשוואות הבאות:

$$z^6 = 1.4.1$$

פתרון:

שלב א': נעביר את המשוואה לצורה פולרית: $z = rcis\theta$, $1 = 1cis(0^\circ)$
לכן:

$$(rcis\theta)^6 = 1cis0$$

$$r^6 cis(6\theta) = 1cis0$$

יתקיים שוויון אם ורק אם:

$$\begin{cases} r^6 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 6\theta = 0^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \theta = 60^\circ k \end{cases}$$

לכן הפתרונות למשוואה הם:

$$z = 1cis(60^\circ k) \text{ לכל } k \text{ שלם.}$$

נשים לב, על מנת לכסות את כל הפתרונות מספיק לרוץ על k מ 0 עד 5.
(מכיוון שעבור כל k אחר נקבל את הפתרונות הנ"ל באופן מחזורי).
לכן, בסה"כ הפתרונות הם:

$$z = cis(60^\circ k) \text{ עבור } k = 0, \dots, 5.$$

$$z^4 = \sqrt{3} + i.4.2$$

פתרון:

שלב א': נעביר את המשוואה לצורה פולרית: $z = rcis\theta$.
עבור $\sqrt{3} + i$ נמצא את ההצגה הפולרית.

$$r = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\theta = 30^\circ \quad \text{or} \quad \theta = 210^\circ$$

$$\sqrt{3} + i \text{ נמצא ברביע הראשון לכן הזווית המתאימה היא } \theta = 30^\circ$$

$$\sqrt{3} + i = 2cis30^\circ$$

נציב במשוואה:

$$z^4 = \sqrt{3} + i$$

$$(rcis\theta)^4 = 2cis30^\circ$$

$$r^4 cis(4\theta) = 2cis30^\circ$$

יתקיים שוויון אם ורק אם:

$$\begin{cases} r^4 = 2 \Rightarrow r = \sqrt[4]{2} \\ 4\theta = 30^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \theta = 7.5^\circ + 90^\circ k \end{cases}$$

לכן הפתרונות למשוואה הם:

$$z = \sqrt[4]{2} cis(7.5^\circ + 90^\circ k) \text{ לכל } k \text{ שלם.}$$

נשים לב, על מנת לכסות את כל הפתרונות מספיק לרוץ על k מ 0 עד 3.
(מכיוון שעבור כל k אחר נקבל את הפתרונות הנ"ל באופן מחזורי).
לכן, בסה"כ הפתרונות הם:

$$z = \sqrt[4]{2} cis(7.5^\circ + 90^\circ k) \text{ עבור } k = 0, \dots, 3.$$

$$z^5 - 2 + 2i = 0 \quad 4.3$$

פתרון:

נעביר אגפים ונקבל את המשוואה $z^5 = 2 - 2i$
 כעת, נעביר את המשוואה לצורה פולרית: $z = r \operatorname{cis} \theta$
 עבור $2 - 2i$ נמצא את ההצגה הפולרית.

$$r = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8}$$

$$\tan \theta = \frac{-2}{2} = -1 \Rightarrow$$

$$\theta = -45^\circ \quad \text{or} \quad \theta = 135^\circ$$

$2 - 2i$ נמצא ברביע הרביעי לכן הזווית המתאימה היא $\theta = -45^\circ$
 $2 - 2i = \sqrt{8} \operatorname{cis}(-45^\circ)$ ו

נציב במשוואה:

$$z^5 = 2 - 2i$$

$$(r \operatorname{cis} \theta)^5 = \sqrt{8} \operatorname{cis}(-45^\circ)$$

$$r^5 \operatorname{cis}(5\theta) = \sqrt{8} \operatorname{cis}(-45^\circ)$$

יתקיים שוויון אם ורק אם:

$$\begin{cases} r^5 = \sqrt{8} \Rightarrow r = \sqrt[5]{8} \\ 5\theta = -45^\circ + 360^\circ k \Rightarrow \theta = -9^\circ + 72^\circ k \end{cases}$$

לכן הפתרונות למשוואה הם:

$$z = \sqrt[5]{8} \operatorname{cis}(-9^\circ + 72^\circ k) \quad \text{לכל } k \text{ שלם.}$$

נשים לב, על מנת לכסות את כל הפתרונות מספיק לרוץ על k מ 0 עד 4.
 (מכיוון שעבור כל k אחר נקבל את הפתרונות הנ"ל באופן מחזורי).
 לכן, בסה"כ הפתרונות הם:

$$z = \sqrt[5]{8} \operatorname{cis}(-9^\circ + 72^\circ k) \quad \text{עבור } k = 0, \dots, 4.$$

5. יהי z מספר מרוכב כך ש $|z| = 1$. הוכיחו כי $|iz - \bar{z}| \leq 2$.

הוכחה:

$$|iz - \bar{z}| = \left| z \left(i - \frac{\bar{z}}{z} \right) \right| = |z| \left| \left(i - \frac{\bar{z}}{z} \right) \right| = \left| \left(i - \frac{\bar{z}}{z} \right) \right| \leq$$

$$|i| + \left| -\frac{\bar{z}}{z} \right| = 1 + \left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1 + \left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = 1 + \frac{|\bar{z}|}{|z|} = 1 + 1 = 2$$

6. נתון $|z_1| = |z_2| = 1$. הוכיחו כי

$$6.1 \quad \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} \quad \text{הוא מספר מדומה (כלומר, החלק הממשי שלו שווה לאפס) בהנחה ש}$$

$$1 - z_1 z_2 \neq 0$$

6.2

הוכחה: נשים לב: מכיוון ש $1 - z_1 z_2 \neq 0$ המספר הנ"ל קיים.

נכפול את המונה והמכנה בצמוד של המכנה:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} &= \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} \frac{\overline{1 - z_1 z_2}}{\overline{1 - z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} \frac{1 - \overline{z_1 z_2}}{1 - \overline{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2 - \overline{z_1 z_1 z_2} - \overline{z_2 z_1 z_2}}{|1 - z_1 z_2|^2} = \\ &= \frac{z_1 + z_2 - |z_1|^2 \overline{z_2} - |z_2|^2 \overline{z_1}}{|1 - z_1 z_2|^2} \stackrel{|z_1|=|z_2|=1}{=} \frac{z_1 + z_2 - \overline{z_2} - \overline{z_1}}{|1 - z_1 z_2|^2} = \frac{z_1 - \overline{z_1} + z_2 - \overline{z_2}}{|1 - z_1 z_2|^2} = \\ &= \frac{2 \operatorname{Im}(z_1)i + 2 \operatorname{Im}(z_2)i}{|1 - z_1 z_2|^2} = \frac{2 \operatorname{Im}(z_1) + 2 \operatorname{Im}(z_2)}{|1 - z_1 z_2|^2} i \end{aligned}$$

נשים לב, הביטוי $\frac{2 \operatorname{Im}(z_1) + 2 \operatorname{Im}(z_2)}{|1 - z_1 z_2|^2}$ ממשי. אכן – המונה ממשי כי $\operatorname{Im}(z)$ ממשי לכל z

והמכנה ממשי בתור ערך מוחלט (בריבוע).

לכן הביטוי $\frac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} = \frac{2 \operatorname{Im}(z_1) + 2 \operatorname{Im}(z_2)}{|1 - z_1 z_2|^2} i$ הוא מדומה.

6.3. $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ הוא מספר ממשי, בהנחה ש $1 + z_1 z_2 \neq 0$.

הוכחה: נשים לב: מכיוון ש $1 + z_1 z_2 \neq 0$ המספר הנ"ל קיים.

נכפול את המונה והמכנה בצמוד של המכנה:

$$\begin{aligned} \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} &= \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \frac{\overline{1 + z_1 z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} \frac{1 + \overline{z_1 z_2}}{1 + \overline{z_1 z_2}} = \frac{z_1 + z_2 + \overline{z_1 z_1 z_2} + \overline{z_2 z_1 z_2}}{|1 + z_1 z_2|^2} = \\ &= \frac{z_1 + z_2 + |z_1|^2 \overline{z_2} + |z_2|^2 \overline{z_1}}{|1 + z_1 z_2|^2} \stackrel{|z_1|=|z_2|=1}{=} \frac{z_1 + z_2 + \overline{z_2} + \overline{z_1}}{|1 + z_1 z_2|^2} = \frac{z_1 + \overline{z_1} + z_2 + \overline{z_2}}{|1 + z_1 z_2|^2} = \\ &= \frac{2 \operatorname{Re}(z_1) + 2 \operatorname{Re}(z_2)}{|1 + z_1 z_2|^2} = \frac{2 \operatorname{Re}(z_1) + 2 \operatorname{Re}(z_2)}{|1 + z_1 z_2|^2} \end{aligned}$$

נשים לב, הביטוי $\frac{2 \operatorname{Re}(z_1) + 2 \operatorname{Re}(z_2)}{|1 + z_1 z_2|^2}$ ממשי. אכן – המונה ממשי כי $\operatorname{Re}(z)$ ממשי לכל z

והמכנה ממשי בתור ערך מוחלט (בריבוע). לכן $\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ ממשי.

בהצלחה! ☺