

קומבינטוריקה - תרגול 2

26 באוקטובר 2020

1 פעולות בין קבוצות

נגדיר בזריזות פעולות בין קבוצות באופן הבא:

• איחוד:

$$x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

• חיתוך:

$$x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

• הפרש:

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \wedge x \notin B$$

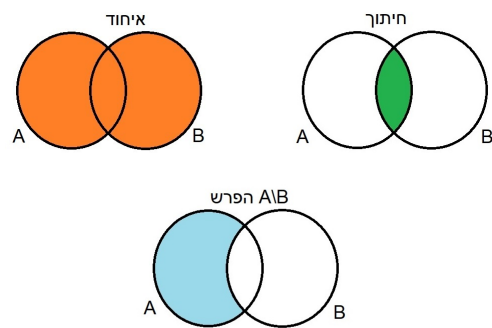
• הפרש סימטרי:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

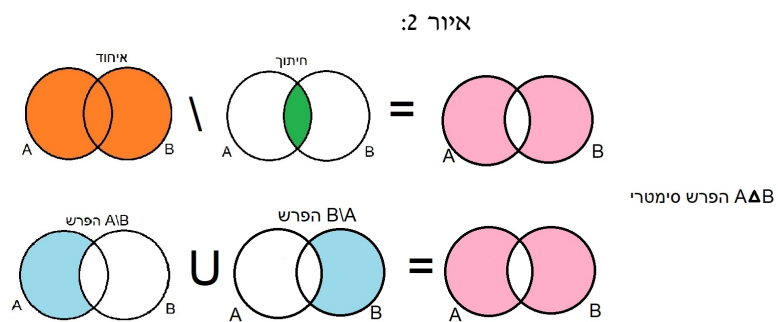
תרגילים:

1. נגדיר $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$, $B = \{1, \{2\}\}$, $C = \{2, \{1, 2\}\}$. חשבו את הבאים:

$$A \cap B = \{1\} \quad (\text{א})$$



איור 1:



$$B \cap C = \{\} = \emptyset \quad (\text{ב})$$

$$A \cup C = \{1, 2, \{1, 2\}\} \quad (\text{ג})$$

$$A \Delta (B \cap C) = A \Delta \emptyset = A \quad (\text{ד})$$

2. הוכיחו או הפריכו:

(א) לכל 3 קבוצות A, B, C מתקיים:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

פתרון: זו הוכחה, וכלל זה נקרא "חוק הפילוג". כדי להוכיח שיוויון בין קבוצות, הרבה פעמים נשתמש בהכלה דו כיוונית, כי:

$$X = Y \iff X \subset Y \wedge Y \subset X$$

C : יהי $x \in A \cap (B \cup C)$. נקבל: $x \in A$ וגם $x \in B$ או $x \in C$. נחלק למקרים:

1. אם אכן $x \in B$ אז $x \in A \cap B$ ולכן גם $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

2. ואם $x \in C$ אז $x \in A \cap C$ ולכן גם $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

בכל מקרה, קיבלנו $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ כדרוש.

$\supset$: יהי $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. נקבל: $x \in A \cap B$ או $x \in A \cap C$. שוב נחלק למקרים:

1. אם $x \in A \cap B$ אז $x \in A$ וגם $x \in B$. כיון שהוא שייך ל- B , נקבל

$$x \in B \cup C \quad \text{בסה"כ } x \in A \text{ וגם } x \in B \cup C \text{ ולכן } x \in A \cap (B \cup C).$$

2. אם $x \in A \cap C$ אז $x \in A$ וגם $x \in C$. כיון שהוא שייך ל- C , נקבל

$$x \in B \cup C \quad \text{בסה"כ } x \in A \text{ וגם } x \in B \cup C \text{ ולכן } x \in A \cap (B \cup C).$$

(ב) לכל 3 קבוצות A, B, C מתקיים:

$$A \Delta (B \cap C) = (A \Delta B) \cap (A \Delta C)$$

פתרון: הפרכה. צריך למצוא קבוצות A, B, C כך שאין שיוויון. נשים לב שאם $B \cap C = \emptyset$ אז משמאל נקבל $A \Delta \emptyset = A$. ניקח $A = \{1, 2, 3\}, B = \{1\}, C = \{2\}$. כאמור צד שמאל הוא A . נבחן את צד ימין:

$$A \Delta B = \{2, 3\}$$

$$A \Delta C = \{1, 3\}$$

ולכן

$$(A \Delta B) \cap (A \Delta C) = \{3\} \neq A$$

ולכן קב' אלו מהוות הפרכה.

1.1 מכפלה קרטזית

זוג סדור של איברים מסומן (a, b) . יש חשיבות לסדר, ויש משמעות לעובדה $a = b$. כלומר,

$$(1, 2) \neq (2, 1)$$

והזוג הבא חוקי:

$$(1, 1)$$

המכפלה של קבוצות A, B מוגדרת להיות:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

דוגמאות:

• $A = \{1, 2\}, B = \{a, b, c\}$ אז:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

• $\mathbb{R}^2$

1.1.1 יחסים

הגדרה: תהיינה A, B קבוצות. תת קבוצה $R \subset A \times B$ נקראת יחס מ- A ל- B .

דוגמאות:

- $A \times B \subset A \times B$. כלומר $A \times B$ הוא יחס מ- A ל- B .
- $R = \{(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n|m\}$. כאשר $n|m$ הכוונה $\frac{m}{n} \in \mathbb{N}$ (במילים: "מחלק את"). למשל $(2, 4) \in R, (2, 10) \in R$. נשים לב שעבור $n = 1$ מתקיים: $\forall m : (1, m) \in R$.
- דוגמא: A תהיה קבוצת ערי ישראל. B תהיה קבוצת אזרחי ישראל. והיחס R יהיה אוסף הזוגות $(p, t) \in B \times A$ כך ש- p גר ב- t .
- $A = \{1, 2, 3\}, B = \{3, 4, 5\}$ ו- $R = \{(1, 5), (3, 3)\} \subset A \times B$ הוא יחס מ- A ל- B . $R' = \{(2, 4), (3, 5)\}$ גם יחס מ- A ל- B .