פתרון שאלה 3 תרגיל 8 אנליזה הרמונית תשע"ט

7 בינואר 2019

נרשום את הטור במפורש:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin nx$$

לכל x מתקיים: $|2^{-n}\sin nx|\leq 2^{-n}$, הטור $\sum 2^{-n}$ מתכנס ולכן, לפי ויירשטראס, הטור מתכנס במ"ש. כמו כל טור פורייה זהו טור של פונקציות רציפות, ולכן גם $S(x)$ פונקציה רציפה.

א. אם ניקח את S ונשנה אותה בנקודה, נקבל פונקציה אחרת עם אותם מקדמי פורייה. למשל, נשים לב ש: $S(0)=0$, ואם נגדיר:

$$f(x)=\begin{cases} S(x) & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

נקבל שהפונקציה f רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$, מקדמי פורייה שלה הם $a_0=a_n=0,\, b_n=2^{-n}$ אך היא לא רציפה. הפרכנו את הטענה.

ב. נזכור שמתקיים:

$$e^{it}=\cos t+i\sin t,\,\sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$$

ונרקוד:

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin nx=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}e^{inx}-\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}e^{-inx}\right)=$$

$$=\frac{1}{2i}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{2}\right)^{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-ix}}{2}\right)^{n}\right)=$$

אלו טורים הנדסיים, ואנו יודעים לחשב את סכומם:

$$\frac{1}{2i}\left(\frac{\frac{e^{ix}}{2}}{1-\frac{e^{ix}}{2}}-\frac{\frac{e^{-ix}}{2}}{1-\frac{e^{-ix}}{2}}\right)=\frac{1}{2i}\left(\frac{e^{ix}}{2-e^{ix}}-\frac{e^{-ix}}{2-e^{-ix}}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{e^{ix}\left(2-e^{-ix}\right)-e^{-ix}\left(2-e^{ix}\right)}{\left(2-e^{ix}\right)\left(2-e^{-ix}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2e^{ix}-2e^{-ix}}{4-2e^{-ix}-2e^{ix}+1}=\frac{1}{2i}\cdot\frac{2\cdot 2i\cdot\sin x}{5-2\cdot 2\cdot\cos x}=\frac{2\sin x}{5-4\cos x}$$

ג. הטור שלנו מתכנס, וטור הנגזרות הוא:

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n\cos nx$$

גם הוא מתכנס במ"ש (לפי ויירשטראס; הטור $\sum n2^{-n}$ מתכנס), ולכן שווה לנגזרת של הטור:

$$S'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}n\cos nx$$

וזהו טור פורייה.

לחלופין, S רציפה, $S\left(\pi\right)=S\left(-\pi\right)=0$, ואפשר להסביר למה S' רציפה למקוטעין.