בחינה בקורס **חשבון אינפיניטסימלי 1** (88-132-07) – מועד א

אוניברסיטת בר־אילן, יום א, כח שבט תשפו (15.2.26)

מרצה: פרופ׳ בועז צבאן

מתרגלים: דניאל גרימלנד, אופיר טשיל

משך הבחינה: שלוש שעות

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו

הנחיות

1. יש לענות בגוף השאלון בלבד. מחברת הטיוטה לא תיבדק.
2. המבחן מורכב משני חלקים.

(א) החלק הראשון (20 שאלות, 2 נקודות לכל שאלה) מופיע בטופס נפרד. בחלק זה יש שאלות שיש לסמן עבורן נכון/לא נכון, ללא נימוק. כדי לעבור את המבחן יש לצבור לפחות 12 תשובות נכונות בחלק זה, ולהשלים בעזרת החלק השני ל 60 נקודות או יותר.

(ב) החלק השני (56 נקודות) מופיע להלן, ובו שאלות שיש לענות עליהן בכתב. **יש לענות על 2 שאלות מתוך 3.** משקל כל שאלה: 28 נקודות.

(ג) עד 4 נקודות יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות של התשובות. השתמשו במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאתם פתרון, כתבו אותו בצורה מסודרת בגוף הבחינה.

3. בשאלה עם כמה סעיפים הנקודות מתחלקות בשווה, בקירוב, בין סעיפי השאלה. בכל סעיף מותר להשתמש בסעיפים הקודמים, גם אם לא הצלחתם לפתור אותם.
4. אם המקום המיועד לתשובה לא מספיק, אפשר להמשיך את הפתרון במקומות הבאים, לפי סדר עדיפויות יורד:

(א) גב הדף של השאלה שאתם פותרים.

(ב) שני הדפים הנוספים בסוף המבחן (בשני העמודים של כל דף).

(ג) דף של שאלה אחרת (שני צדדיו).

(ד) בטופס נוסף שתבקשו מהבוחנים, וישודך לטופס המקורי.

יש לציין בכל עמוד שהסתיים היכן הפתרון ממשיך.

5. אם אתם כותבים פתרון שאלה בעמוד אחר מעמוד השאלה, יש לציין בעמוד של השאלה את מיקום הפתרון.

בהצלחה!

חלק שני: שאלות כתיבה

ענו בצורה מלאה ומנומקת על **שתי שאלות** מבין שלושת השאלות הבאות.

שאלה 1

(כל סעיף בשאלה זו יש להוכיח באופן ישיר, ולא כמסקנה ממשפט דומה.)

יהי a מספר ממשי.

א. הוכח שלכל סידרה $a_n \longrightarrow a^+$ יש תת־סידרה יורדת ממש.

ב. יהיו f ו g פונקציות גזירות בסביבה ימנית מנוקבת של a כך ש $g(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \infty$ והגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים.

הוכח שיש סביבה ימנית מנוקבת $(a, a+\delta)$ של a שבה מתקיימים שלושת הדברים הבאים:

- הפונקציות f ו g גזירות.
- הפונקציות $\frac{f(x)}{g(x)}$ ו $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מוגדרות.
- הפונקציה g יורדת ממש בסביבה $(a, a+\delta)$.

ג. הוכח, מתוך הנתונים בסעיף הקודם, שמתקיים $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$.

תשובה: משפטים אלה הוכחו בהרצאה (ייתכן שעבור גבול מצד שני). נצרך להם הוכחה כאן.

א. נבחר באינדוקציה סידרה עולה של מספרים טבעיים $m_1 < m_2 < \cdots$ כך שהתת־סידרה $(a_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ יורדת ממש. כיון ש $a_n \longrightarrow a^+$, נקבל שגם $a_{m_n} \longrightarrow a^+$.

פרטי הבנייה:

ניקח $m_1 := 1$.

באינדוקציה, נניח עבור $n \geq 1$ שכבר בחרנו מספרים טבעיים $m_1 < m_2 < \cdots < m_n$ כך שמתקיים $a < a_{m_n} < \cdots < a_{m_2} < a_{m_1}$.

כיון ש $a_k \xrightarrow[k\to\infty]{} a < a_{m_n}$ (כאן n קבוע), מתקיים $a_k < a_{m_n}$ לכמעט כל k.

יהי m_{n+1} המספר הטבעי הקטן ביותר $k > m_n$ כך ש $a_k < a_{m_n}$.

אז $m_1 < m_2 < \cdots < m_n < m_{n+1}$ ומתקיים $a < a_{m_{n+1}} < a_{m_n} < \cdots < a_{m_2} < a_{m_1}$.

ב. מהנתון, יש סביבה ימנית מנוקבת $(a, a+\delta_1)$ של a $(0 < \delta_1)$ שבה הפונקציות f, g גזירות. בפרט, הפונקציות f, g מוגדרות בסביבה $(a, a+\delta_1)$.

כיון ש $g(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \infty$, יש סביבה ימנית מנוקבת $(a, a+\delta_2)$ של a $(0 < \delta_2)$ שבה $0 < g(x)$. בפרט, $g(x) \neq 0$ בסביבה $(a, a+\delta_2)$.

כיון שהגבול $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ קיים במובן הרחב, יש סביבה ימנית מנוקבת $(a, a+\delta_3)$ של a $(0 < \delta_3)$ שבה הפונקציה $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מוגדרת, ובפרט $g'(x) \neq 0$.

יהי $\delta := \min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\} > 0$. אז בסביבה הימנית המנוקבת $(a,a+\delta)$ של a מתקיים: הפונקציות f,g גזירות ובפרט מוגדרות, $g(x)\neq 0$, ו $g'(x)\neq 0$. בפרט, הפונקציות $\frac{f(x)}{g(x)}$ ו $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ מוגדרות בסביבה זו.

כיון ש $g'(x)\neq 0$ בקטע $(a,a+\delta)$, הפונקציה g עולה ממש בקטע, או יורדת ממש בו (משפט על נגזרת שונה מאפס בקטע מוכלל). כיון ש $g(x)\xrightarrow[x\to a^+]{}\infty$, הפונקציה g יורדת ממש בקטע $(a,a+\delta)$. (הסבר: ניקח סידרה יורדת ממש $a_n \longrightarrow a$. אז $g(a_n)\longrightarrow\infty$. לכל n מתקיים $a_n\leq a_1$ ולכן אם g היתה עולה בקטע, היינו מקבלים $g(a_n)\leq g(a_1)$ $\longleftarrow\infty$.ֿ)

ג. נסמן $b := \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

נשתמש בלמה הבאה מהקורס: תהי h פונקציה כך שלכל סידרה יורדת ממש $a_n \longrightarrow a$ מתקיים $h(a_n)\longrightarrow b$ אז $h(x)\xrightarrow[x\to a^+]{} b$.

מהלמה, מספיק להוכיח שלכל סידרה יורדת ממש $a_n\longrightarrow a$ מתקיים $\frac{f(a_n)}{g(a_n)}\longrightarrow b$.

תהי $a_n\longrightarrow a$ סידרה יורדת ממש. אז $a_n\in(a,a+\delta)$ לכמעט כל n, ולכן יש לסידרה זנב $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ שכולו בסביבה $(a,a+\delta)$.

כיון שהפונקציה g יורדת ממש בקטע $(a,a+\delta)$ והסידרה $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת ממש בו, הסידרה $(g(t_n))_{n=1}^{\infty}$ עולה ממש (לכל n מתקיים $t_{n+1}<t_n$ ולכן $g(t_{n+1})>g(t_n)$).

כיון ש $t_n\longrightarrow a^+$, נקבל מהנתון $g(t_n)\longrightarrow\infty$.

לכל מספר טבעי n:

כיון שהפונקציות f,g גזירות בקטע $(a,a+\delta)$ ומתקיים $a<t_{n+1}<t_n<a+\delta$, הפונקציות רצגזיות בקטע $[t_{n+1},t_n]$ (רציפות בקטע הסגור וגזירות בקטע הפתוח). ממשפט הערך הממוצע המוכלל בקטע $[t_{n+1},t_n]$, יש נקודה $t_{n+1}<c_n<t_n$ המקיימת $\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=\frac{f(t_n)-f(t_{n+1})}{g(t_n)-g(t_{n+1})}$.

כיון ש $a<c_n<t_n$ לכל n, נקבל ממשפט הסנדביץ' $c_n\longrightarrow a^+$. כיון ש $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=b$, נקבל

$$\lim\frac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{g(t_{n+1})-g(t_n)}=\lim\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=b.$$

כיון שהסידרה $(g(t_n))_{n=1}^{\infty}$ עולה ממש ושואפת ל ∞, מתקיימים תנאי משפט שטולץ $(\frac{*}{\infty})$ המבטיח את השוויון:

$$\lim\frac{f(t_n)}{g(t_n)}=\lim\frac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{g(t_{n+1})-g(t_n)}.$$

כיון שהסידרה $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ היא זנב של הסידרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, נקבל

$$\lim\frac{f(a_n)}{g(a_n)}=\lim\frac{f(t_n)}{g(t_n)}=\lim\frac{f(t_{n+1})-f(t_n)}{g(t_{n+1})-g(t_n)}=\lim\frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}=b.$$

שאלה 2

א. האם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n+1)-\sin n}{n}$ מתכנס או מתבדר? הוכח!

ב. יהי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי ממש ($0 < a_n$ לכל n). נתון שקיים קבוע ממשי $0 < c$ כך שמתקיים

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\log(a_n)}{\log(n+c)} < -1.$$

הוכח שהטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

תשובה:

א. נשתמש במשפט דיריכלה כדי להראות שהטור מתכנס.

לכל k טבעי הסכום החלקי הוא טלסקופי:

$s_k = (\sin 2 - \sin 1) + (\sin 3 - \sin 2) + \cdots + (\sin k - \sin(k-1)) + (\sin(k+1) - \sin k) = \sin(k+1) - \sin 1$

ומאי־שוויון המשולש נקבל $|s_k| \le |\sin(k+1)| + |\sin 1| \le 1 + 1 = 2$. לכן הטור $\sum \sin(n+1) - \sin n$ חסום.

כיון שהסידרה $\left(\frac{1}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ יורדת ממש וגבולה אפס, הטור של המכפלות $\sum(\sin(n+1) - \sin n)\cdot\frac{1}{n}$ מתכנס לפי משפט דיריכלה. טור זה שווה לטור הנתון.

הערה: אפשר להוכיח, בשיטות ששימשו אותנו להוכיח שהטור $\sum \frac{\sin n}{n}$ לא מתכנס בהחלט, שגם הטור שלנו לא מתכנס בהחלט. ההוכחה משתמשת בזהות $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$, שנותנת $\sin(n+1) - \sin n = 2\sin\frac{1}{2}\cos(n+\frac{1}{2})$, ובכלל $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$ כאשר i הוא המספר המרוכב המוכר, ו $e^{i\alpha}$ הוא סימון מקוצר ל $\cos\alpha + i\sin\alpha$. מוזמנים להשלים את הפרטים!

ב. ניקח מספר $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log(a_n)}{\log(n+c)} < \alpha < -1$. אז $\frac{\log(a_n)}{\log(n+c)} < \alpha$ לכמעט כל n.

לכל n מתקיים $1 < n+c$ ולכן $0 < \log(n+c)$ ולכן כפל ב $\log(n+c)$ לא משנה את כיוון האי־שוויון.

לכן, לכמעט כל n מתקיים:

$$\log(a_n) < \alpha\log(n+c) = \log\left((n+c)^{\alpha}\right).$$

מכיון שהפונקציה $\log$ עולה ממש בתחום הגדרתה, מתקיים $a_n < (n+c)^{\alpha}$.

נראה, בעזרת מבחן ההשוואה הגבולי, שהטור $\sum(n+c)^{\alpha}$ חבר של הטור $\sum n^{\alpha}$: ראשית נשים לב ששני הטורים חיוביים ממש.

$$\frac{(n+c)^{\alpha}}{n^{\alpha}} = \left(\frac{n+c}{n}\right)^{\alpha} \longrightarrow 1^{\alpha} = 1,$$

כיון ש $\frac{n+c}{n} = 1 + c\cdot\frac{1}{n} \longrightarrow 1$ מחשבון גבולות, והעלאה בחזקה היא רציפה בבסיס.

כיון ש $0 < 1 < \infty$, הטורים חברים.

כיון ש $\alpha < -1$, מתקיים $1 < -\alpha$ ולכן $\sum n^{\alpha} = \sum \frac{1}{n^{-\alpha}} < \infty$ ולכן גם $\sum(n+c)^{\alpha} < \infty$.

כיון ש $a_n < (n+c)^{\alpha}$ לכמעט כל n, נקבל ממבחן ההשוואה שגם $\sum a_n < \infty$.

שאלה 3

תהי $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה עולה. יהי c מספר ממשי.

א. הוכח שהסופרמום $\sup\{f(x) : x < c\}$ והאינפימום $\inf\{f(x) : c < x\}$ שניהם קיימים.

ב. הוכח שהגבול $\lim_{x\to c^-} f(x)$ קיים ושווה ל $\sup\{f(x) : x < c\}$.

ג. הוכח בעזרת הסעיפים הקודמים שהגבול $\lim_{x\to c^+} f(x)$ קיים ושווה ל $\inf\{f(x) : c < x\}$.

(הוכחה ישירה של סעיף זה, ללא שימוש בסעיפים הקודמים, תזכה בחצי מהנקודות שלו.)

ד. הוכח שכל נקודת אי־רציפות של הפונקציה f היא מסוג ראשון (קפיצה).

תשובה:

א. הקבוצה $\{f(x) : x < c\}$ לא ריקה: ניקח $a < c$ אז $f(a)$ נמצא בקבוצה.

הקבוצה חסומה מלעיל על ידי $f(c)$: כיון שהפונקציה f עולה, לכל $x < c$ מתקיים $f(x) \le f(c)$.

מאקסיומת החסם העליון, יש לקבוצה סופרמום.

בדומה, הקבוצה $\{f(x) : c < x\}$ לא ריקה (ניקח $c < a$ אז $f(a)$ נמצא בקבוצה) וחסומה מלרע על ידי $f(c)$ (כי הפונקציה עולה), ולכן יש לקבוצה אינפימום.

ב. יהי $s := \sup\{f(x) : x < c\}$.

תהי $x_n \longrightarrow c^-$.

אז לכל n מתקיים $x_n < c$, ולכן $f(x_n) \le s$.

יהי $0 < \epsilon$. מתכונת הסופרמום של קבוצה, יש בקבוצה $\{f(x) : x < c\}$ איבר $f(a)$ ($a < c$) כך ש $s - \epsilon < f(a)$.

כיון ש $x_n \longrightarrow c > a$, מתקיים $a < x_n$ לכמעט כל n.

כיון שהפונקציה f עולה, מתקיים $f(a) \le f(x_n)$ לכמעט כל n, ויחד עם שני האי־שיוויונים שהוכחו קודם, נקבל $s - \epsilon < f(a) \le f(x_n) \le s < s + \epsilon$.

לסיכום: לכל $0 < \epsilon$ מתקיים $f(x_n) \in (s - \epsilon, s + \epsilon)$ לכמעט כל n. זה אומר ש $s \longrightarrow f(x_n)$.

הראנו זאת לכל סידרה $x_n \longrightarrow c^-$, ולכן $\lim_{x\to c^-} f(x) = s$.

ג. תהי $g(x) := -f(-x)$ לכל x ממשי.

כיון שהפונקציה f עולה, הפונקציה g עולה: אם $x_1 < x_2$ אז $-x_2 < -x_1$ ולכן $f(-x_2) \le f(-x_1)$ ולכן $g(x_1) = -f(-x_1) \le -f(-x_2) = g(x_2)$.

מסעיף ב, הגבול $b := \lim_{x\to -c^-} g(x)$ קיים ושווה ל $\sup\{g(x) : x < -c\}$.

$\lim_{x\to c^+} f(x) = -b$: תהי $x_n \longrightarrow c^+$. אז $-x_n \longrightarrow -c^-$ (כי $x_n \longrightarrow c$ לכן מחשבון גבולות $-x_n \longrightarrow -c$. לכל n מתקיים $c < x_n$ ולכן $-x_n < -c$). לכן $g(-x_n) \longrightarrow b$, ולכן $f(x_n) = -g(-x_n) \longrightarrow -b$.

נוכיח את השוויונים הבאים:

$$-b = -\sup\{g(x) : x < -c\} \overset{(1)}{=} \inf\{-g(x) : x < -c\}$$
$$\overset{(2)}{=} \inf\{-g(-x) : c < x\} \overset{(3)}{=} \inf\{f(x) : c < x\}.$$

(1) תהי $A := \{g(x) : x < -c\}$. כאמור, הקבוצה A חסומה מלעיל, ולכן הקבוצה $-A$ חסומה מלרע, ומתקיים $\inf(-A) = -\sup(A)$.

(2) כיוון ש B =: $\{x : x < -c\}$ = $\{-x : c < x\}$ =: A:

$B \subseteq A$: אם $t \in A$ אז יש $c < x$ כך ש $t = -x < -c$ ולכן $t \in B$.

$A \subseteq B$: אם $t \in B$ אז $t < -c$ ולכן $c < -t$ ולכן $t = -(-t) \in A$.

(3) לכל x מתקיים $g(-x) := -f(-(-x)) = -f(x)$ ולכן $-g(-x) = f(x)$.

לסיכום, $\lim_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : c < x\}$.

ד. יהי c מספר ממשי. מסעיפים ב וג נקבל שהגבולות של הפונקציה f מימין ומשמאל בנקודה c קיימים, ומתקיים

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x < c\} \overset{(1)}{\leq} f(c) \overset{(2)}{\leq} \inf\{f(x) : c < x\} = \lim_{x \to c^+} f(x).$$

הסבר האי־שיוויונים:

(1) כיון שהפונקציה f עולה, לכל $x < c$ מתקיים $f(x) \leq f(c)$.

(2) כיון שהפונקציה f עולה, לכל $c < x$ מתקיים $f(c) \leq f(x)$.

אם הגבולות מימין ומשמאל שווים, נקבל ששניהם שווים לערך $f(c)$ ולכן $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$, כלומר הפונקציה f רציפה בנקודה c.

לכן, אם c נקודת אי־רציפות של הפונקציה f, הגבולות מימין ומשמאל קיימים ושונים, וזו אי־רציפות מסוג ראשון (קפיצה).

דף נוסף ראשון לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)

דף נוסף שני לפתרון שאלות (למי שהמקום בדפים הקודמים לא הספיק)