תרגיל 9

1. תהי f פונקציה המוגדרת בקטע $[-1,1]$:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

האם f מקיימת את תנאי ליפשיץ?

פתרון:

מכיוון שהנגזרת f' איננה חסומה בקטע $[-1,1]$ נובע כי לכל $M,\varepsilon>0$ קיים $-1\leq x_0\leq 1$ כך ש $f'(x_0)>M+\varepsilon$ מכאן שקיים $h>0$ כך ש $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}>M$ ומכאן שהפונקציה איננה רציפה ליפשיץ.

2. הוכיחו על פי ההגדרה כי פונקציית קנטור אינה רציפה בהחלט

פתרון:

בשלב הבנייה ה n של קבוצת קנטור אנחנו נשארים עם קבוצה של קטעים זרים עם גודל כולל של $(\frac{2}{3})^n$
אבל העלייה של פונקציית קנטור על קטעים אלו היא 1

3. נניח ו f הינה רציפה בהחלט בקטע $[0,1]$ ולכל $A\subseteq[0,1]$ נגדיר $f(A)=\{f(x): x\in A\}$. הראו כי אם A הינה בעלת מידת לבג 0 אזי $f(A)$ בעלת מידת לבג 0.

פתרון: מכיוון ש f רציפה בהחלט נובע כי היא בעלת השתנות חסומה ולכן ניתן לפרק אותה להפרש של שתי פונקציות עולות. מכיוון ש f רציפה בהחלט, ניתן להראות כי $f = f_1 - f_2$ כאשר f_1, f_2 רציפות בהחלט ועולות. מכיוון ש $m(A) = 0$ נובע כי נוכל למצוא קבוצה פתוחה $A \subseteq O$ כך ש $m(O) < \varepsilon$. נוכל לרשום $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ כאשר $\{I_n\}$ קטעים זרים. מכיוון ש f_1 הינה פונקציה עולה נובע כי $\{f_1(I_n)\}$ הינם קטעים(אולי טריויאלים) זרים (אולי פרט לנקודון) וכי

$$m(f_1(A)) \le m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right) \Leftarrow f_1(A) \subseteq \bigcup_i f_1(I_i)$$

מכיוון ש f_1 עולה ורציפה ברור כי המידה של תמונה של קטע (x_1, x_2) תהיה $f(x_2) - f(x_1)$
נסמן $I_n = (a_n, b_n)$, f_1 רציפה בהחלט ולכן קיימת הנגזרת $f_1{}'$ וכן
$\int_{a_i}^{b_i} f_1{}'dm = f_1(b_i) - f_1(a_i)$.

$$m\left(\bigcup_i f_1(I_i)\right) = \sum_{i=1}^{\infty} m(f(I_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} f_1(b_i) - f_1(a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{a_i}^{b_i} f_1{}'dm$$
$$= \int_O f_1{}'dm$$

כאשר השיוון האחרון נובע מכך ש $f' \ge 0$ כב"מ. מכאן ש

$$m(O) \to 0 \Rightarrow \int_O f_1{}'dm \to 0$$

ומכאן ש $m(f_1(O)) \to 0$. באותו אופן נראה כי $m(f_2(O)) \to 0$. נסמן ב $f_1(I_i) = (a_i^1, b_i^1), f_2(I_i) = (a_i^2, b_i^2)$ ונשים לב כי

$$\begin{aligned}
&f((a_i, b_i)) \subseteq (b_i^1 - a_i^2, a_i^1 - b_i^2) \\
&\Rightarrow m(f((a_i, b_i))) \le b_i^1 - a_i^2 - (a_i^1 - b_i^2) = m(f_1((a_i, b_i))) + m(f_2((a_i, b_i))) \\
&\Rightarrow m(f(A)) \le m(f(O)) \le m(f_1(O)) + m(f_2(O)) \underset{m(O)\to 0}{\to} 0
\end{aligned}$$

מכאן ש $m(f(A) = 0)$. מש"ל.