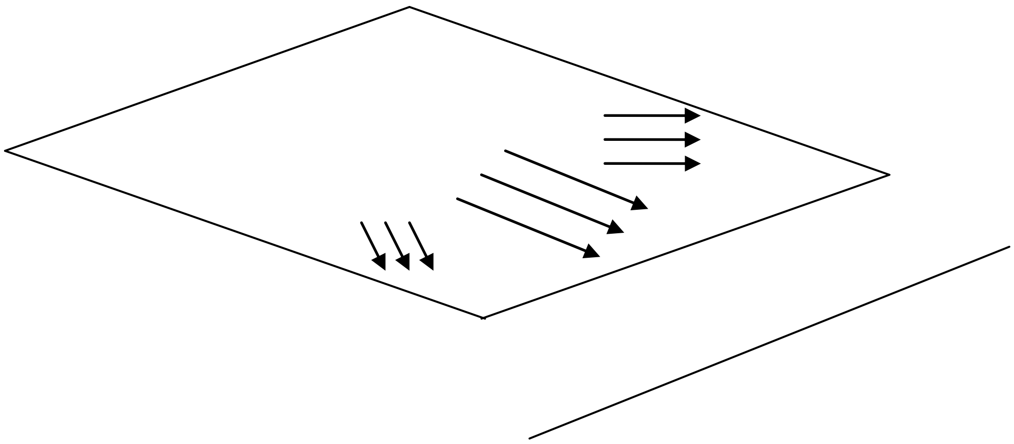
בניות המישור הפרויקטיבי:

1. השלמת R^2 ל RP^2 ע"י:

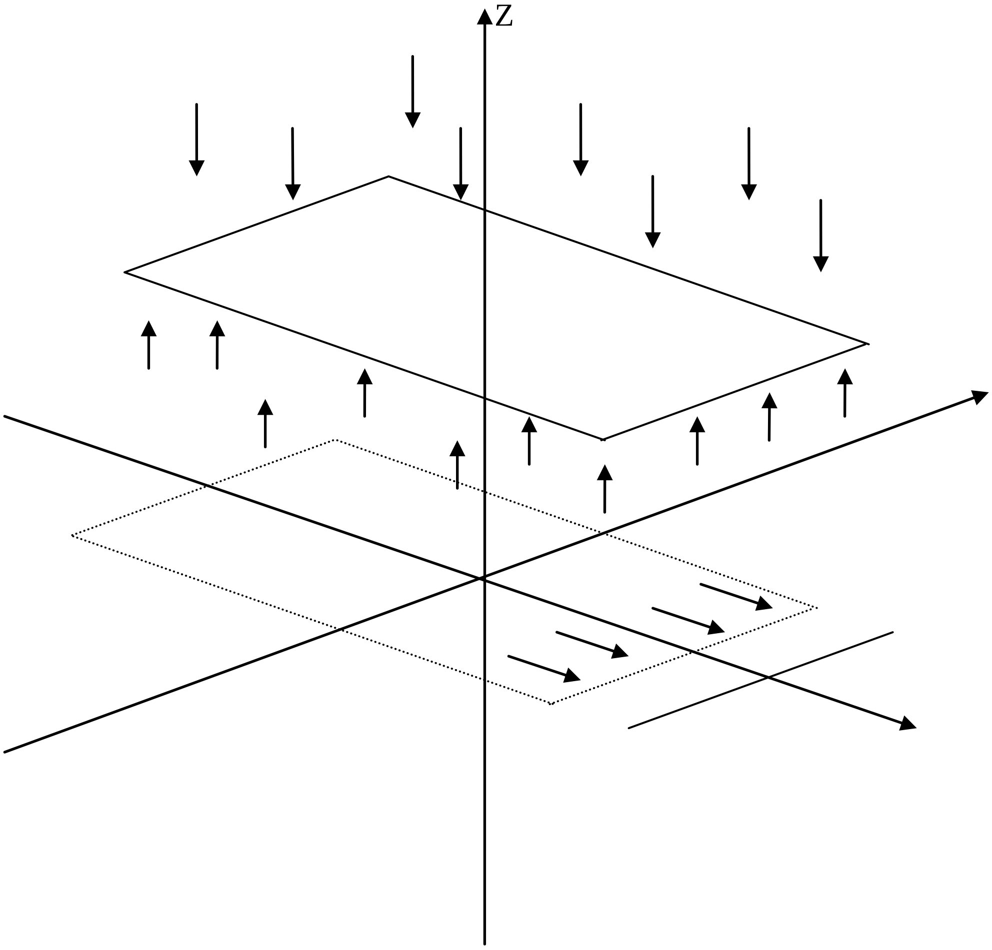
א. הוספת נק' ייחודית באינסוף לכל אלומת ישרים מקבילים ב R^2.

ב. הגדרת אוסף הנק' באינסוף כישר באינסוף.



2. צימצום R^3 ל RP^2 ע"י השקילות:

$$(x,y,z)\approx(x',y',z')\Leftrightarrow\exists\lambda\in\left(R^3\right)^*:(x',y',z')=\lambda(x,y,z)$$



נראה שהם איזומורפיים פרוייקטיבית:

$$S = R^3 / \approx, \quad S' = R^2 \cup \{\text{ישר ב} \infty\}$$

$$T : S \to S'$$

$$\forall P = (x, y, z) \in S \begin{cases} z = 0 : \begin{cases} x \neq 0 : \left(x, y, 0\right) \approx x\left(1, \dfrac{y}{x}, 0\right) \\ x = 0 : (0, y, 0) \approx y(0,1,0) \end{cases} \\ \\ z \neq 0 : (x, y, z) \approx z\left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}, 1\right). \end{cases}$$

$$T(P) = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right), & z \neq 0 \\ \\ \text{נקודה ב} - \infty \\ \text{עם שיפוע מתאים}, & z = 0 \\ \text{ל} - \; m = \dfrac{y}{x} \end{cases} \in S'$$

על:

$$\begin{cases} \forall (a,b) \in R^2 \quad \exists z \neq 0, x, y \in R : (a,b) = \left(\dfrac{x}{z}, \dfrac{y}{z}\right) \\ \forall m \neq \infty \quad \exists x \neq 0, y \in R : m = \dfrac{y}{x} \Rightarrow (1, m, 0) \mapsto m \\ m = \infty : \exists x = 0, y = 1 : (0,1,0) \mapsto \infty \end{cases}$$

חח"ע:

$$T(P_1) = T(P_2)$$

$$\left(\frac{x_1}{z_1}, \frac{y_1}{z_1}\right) = \left(\frac{x_2}{z_2}, \frac{y_2}{z_2}\right) \qquad\qquad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x_1, y_1, 1\right) = \left(x_2, y_2, 1\right) \qquad\qquad \left(x_1, y_1, 0\right) = (x_2, y_2, 0)$$

קולנאריות, או ישר עובר לישר:

$$l \in S \Rightarrow l = \{ax + by + cz = 0 : \exists \text{coefficient} \neq 0\}$$

מקרה 1: $a \neq 0 \vee b \neq 0$

$z=0: P=(\lambda b,-\lambda a,0) \Rightarrow T(P)=$ נקודה ב- ∞ עם שיפוע $-\frac{a}{b}$

$z\neq 0: P\in l=\{\frac{a}{z}x+\frac{b}{z}y+c=0\}=\{y=-\frac{a}{b}x+d\} \Rightarrow T(P)\in$ ישר ב- R^2 עם שיפוע $-\frac{a}{b}$

$\Big\}$ ישר עם שיפוע $-\frac{a}{b}$ ונקודה מתאימה ב- ∞

מקרה 2: $a=b=0$

$$\Downarrow$$

$$l=\{z=0\}$$

$P\in l \Rightarrow T(P)\in$ ישר ב- $\infty \Rightarrow T[l]=$ ישר ב- ∞

----

*ניתן לייצג ישר $l=\{ax+by+cz=0\}$ כ- (a,b,c), כאשר דורשים מקדם שונה מאפס בדיוק כמו שנדרוש עבור הנק' במישור ולכן קיימת התאמה חח"ע ועל בין מס' הנק' והישרים במישור.

טענות:

א.3 נק' $(a,b,c),(x,y,z),(u,v,w)$ קולינאריות במישור:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ u & v & w \end{vmatrix}=0$$

ב. 3 ישרים $(A,B,C),(X,Y,Z),(U,V,W)$ קונקורנטיים במישור:

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ X & Y & Z \\ U & V & W \end{vmatrix}=0$$

ג. משוואת ישר בין (u,v,w) ל (a,b,c):
נבחר נעלם (x,y,z) ואז:

$$l=\{(bw-cv)x-(aw-cu)y+(av-bu)z=0\}$$

ד.

$$C=(a,b,c)\in l$$
$$\Downarrow$$
$$C\cdot l=0$$

תרגילים:

1.נראה ד' ע"ס ג':

$bwa-cva-awb+cub+avc-buc=0$.

2. בידקו קונקורנטיות:

ישר 1:בין $(1,0,3)$ ל $(4,0,2)$

ישר 2:בין $(3,4,0)$ ל $(2,1,0)$

ישר 3:בין $(2,1,0)$ ל $(4,0,2)$

לכן לפי ג':

$$l_1 = (0,10,0) = (0,1,0), l_2 = (0,0,5) = (0,0,1), l_3 = (2,-4,-4) = (1,-2,-2)$$

ולכן לפי ב':

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$$
לא קונקורנטיים.

3. (לא נעשה בכיתה)

הוכח $(1,1,1),(1,2,3),(2,3,4)$ קולינאריות ומצא את הישר שלהן.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$l = \{(2-3)x - (1-3)y + (1-2)z = 0\} = (-1,2,-1)$$

<u>הכללה:</u>

עבור שדה F, ישר(הנקבע ע"פ אכסיומה 1P באופן יחיד ע"י שתי נקודות) ב FP^2 הוא: {ax+by+cz=0} כך שכל המקדמים מ-F ואחד מהם שונה מ-0, זהו בעצם מישור הומוגני(הנקבע כידוע באופן יחיד ע"י 3 נק') ב F^3 ומתקיימת התאמה חח"ע ועל בין מס' הנקודות לישרים במישור.

<u>למשל:</u>

א. הישר בין הנקודות $(1,0,2),(3,0,4)$ ב RP^2 הוא המישור בין הנק' $(1,0,2),(3,0,4),(0,0,0)$ ב R^3. במבט על $(1,0,2),(3,0,4)$ ניתן לנחש כי הישר הוא $\{y=0\}$, היות והישר הוא הומוגני, שתי הנק' שייכות לו וקיימת יחידות זה חייב להיות הישר המבוקש.

ב. הישר בין הנקודות $(3,1,1),(5,1,2)$ ב RP^2 הוא המישור בין הנק' $(3,1,1),(5,1,2),(0,0,0)$ ב R^3. במבט על $(3,1,1),(5,1,2)$ ניתן לנחש כי הישר הוא $\{y=1\}$, היות והישר איננו הומוגני זה לא יכול להיות הישר המבוקש, נחפש כמו ב-ג':

$l = (1,-1,-2)$.