תרגיל בית 7 – טופולוגיה

**שאלה 1**

תהי  קבוצה אינסופית. יהי  איבר ב-. נגדיר .

1. הוכיחו ש- טופולוגיה על .
2. הראו שכל הנקודונים ב-, פרט ל-, הינם סגוחים. מה לגבי ?
3. הראו: .
4. הראו: .

**שאלה 2**

יהי  מ"ט ותהי . תהי  פונקציה אופיינית המוגדרת על-ידי . יהי ****.

1. הוכיחו שאם  רציפה ב- אז .
2. הוכיחו ש  רציפה אמ"מ  אמ"מ  סגוחה ב-.
3. הסיקו שאם  לא קשיר אז קיימת פונקציה רציפה ועל .

**שאלה 3**

יהימ"ט, ותהיינה  ת"ק.

1. הוכיחו כי מתקיים .
2. הראו על ידי דוגמה נגדית כי לא ניתן להחליף את ההכלה בסעיף א' בשיוויון.
3. נסחו והוכיחו טענה דומה (כמו בסעיף א') עבור .

**שאלה 4**

יהיו  מ"ט, ותהי  הומאומורפיזם. הוכיחו כי לכל  מתקיים:

1. 
2. 
3. 
4. 

**שאלה 5**

יהי  מרחב טופולוגי,  קבוצה פתוחה וְ-קבוצה צפופה.

1. הוכיחו  והסיקו: .
2. אפיינו את המרחבים הטופולוגיים  עבורם הקבוצה הצפופה היחידה היא  עצמה. הוכיחו את תשובתכם.

**שאלה 6**

הוכיחו שבכל מרחב נורמי מתקיים . מצאו דוגמה נגדית עבור מרחב מטרי שאינו נורמי.

**שאלה 7**

תהיינה  טופולוגיות על  כך ש-. הוכיחו:

1.  סגורה ב-   סגורה ב- .

נסמן ב-  את הפנים של  במרחב  (כנ"ל עבור ).

1. הוכיחו או הפריכו: , .

היעזרו (בין השאר) במה שהוכחתם על היחס בין הטופולוגיה הרגילה על  לבין הטופולוגיה של סורגנפריי וענו על הסעיף הבא:

1. יהי  הישר של סורגנפריי. מצאו פנים וסגור של הקבוצות הבאות

.

**בהצלחה!**