

הצעה לפתרון – בוחן באלגברה לינארית 1 (88-112) – 15.08.24 (תיכונים)

עדי מכנס

1. (60 נק') נביט במטריצה הבאה המייצגת מערכת משוואות לינארית לא הומוגנית מעל שדה הממשיים.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & 1 & 0 & a \\ 2-a & a^2 & 1 & -a \\ 0 & a^2+1 & a^2-3 & 2-a \end{array} \right)$$

א. קבעו לכל ערך של $a \in \mathbb{R}$ האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

פתרון:

נדרג את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & 1 & 0 & a \\ 2-a & a^2 & 1 & -a \\ 0 & a^2+1 & a^2-3 & 2-a \end{array} \right) \xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & 1 & 0 & a \\ 0 & a^2+1 & 1 & 0 \\ 0 & a^2+1 & a^2-3 & 2-a \end{array} \right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & 1 & 0 & a \\ 0 & a^2+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & 2-a \end{array} \right)$$

נשים לב כי איברי האלכסון יכולים להתאפס כאשר $a = 2$ (הראשון), לאף $a \in \mathbb{R}$ (השני) וכאשר $a = \pm 2$ (השלישי). לכן נחלק למקרים:

אם $a = 2$, נקבל כי המערכת היא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

כעת המערכת מדורגת. אין שורת סתירה, ויש משתנה חופשי אחד (המשתנה השלישי). לכן במקרה זה יש אינסוף פתרונות.

אם $a = -2$, נקבל כי המערכת היא:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right)$$

במקרה זה השורה השלישית הינה שורת סתירה, ולכן במקרה זה אין פתרונות.

אחרת, אם $a \neq \pm 2$ המערכת כבר מדורגת. כעת, כלל המשתנים תלויים – שהרי כלל המקדמים באלכסון המטריצה שונים מ-0 (כפי שראינו לפני כן). לכן במקרה זה יש פתרון יחיד.

סה"כ: נקבל כי

עבור $a \neq \pm 2$ יש פתרון יחיד.

עבור $a = 2$ יש אינסוף פתרונות.

עבור $a = -2$ אין פתרונות.

ב. לכל ערך של $a \in \mathbb{R}$ מצאו את קבוצת הפתרונות למערכת,

הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר $a \in \mathbb{R}$.

פתרון:

נציב תחילה $a = 2$ [מהיכן שהפסקנו לדרג קודם לכן בסעיף א'] ונמצא את הפתרון למערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

נציב פרמטר במשתנה החופשי $x = t$ ולכן קבוצת הפתרונות היא:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} t \\ 2 \\ -10 \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 0 \\ 2 \\ -10 \end{array} \right) + t \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

עתה, עבור $a \neq \pm 2$ – ניתן לבצע את פעולות הדירוג הבאות [מהיכן שהפסקנו לדרג בסעיף א']:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & 1 & 0 & a \\ 0 & a^2+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & 2-a \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{a-2}R_1, \frac{1}{a^2+1}R_2, \frac{1}{a^2-4}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{a-2} & 0 & \frac{a}{a-2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{a^2+1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2 - \frac{1}{a^2+1}R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{a-2} & 0 & \frac{a}{a-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(a+2)(a^2+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+2} \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 - \frac{1}{a-2}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a}{a-2} - \frac{1}{(a-2)(a+2)(a^2+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(a+2)(a^2+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+2} \end{array} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{a(a^2+1)(a+2)-1}{(a-2)(a+2)(a^2+1)} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{(a+2)(a^2+1)} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{a+2} \end{array} \right)$$

ובסה"כ הפתרון היחיד של המערכת הוא:

$$\left(\begin{array}{c} \frac{a(a^2+1)(a+2)-1}{(a-2)(a+2)(a^2+1)} \\ \frac{1}{(a+2)(a^2+1)} \\ -\frac{1}{a+2} \end{array} \right)$$

ג. נביט כעת במטריצה כמייצגת מערכת משוואות לינארית לא הומוגנית מעל שדה המרוכבים. קבעו לכל ערך של $a \in \mathbb{C}$ האם למערכת יש פתרון יחיד, אינסוף פתרונות או אין פתרונות.

פתרון:

נביט שוב במערכת הכמעט מדורגת שלנו מסעיף א':

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & 1 & 0 & a \\ 0 & a^2+1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-4 & 2-a \end{array} \right)$$

כל מה שאמרנו שם עדיין תקף, אך בניגוד לסעיף הקודם, עבור $a = \pm i$ האיבר השני באלכסון מתאפס. נציב ערכים אלה ונבדוק את מצב המערכת.

עבור $a = i$, נקבל את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} i-2 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2-i \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} i-2 & 1 & 0 & i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{array} \right)$$

נשים לב כי השורה השלישית הינה שורת סתירה, ולכן עבור $a = i$ למערכת אין פתרונות.

באופן דומה, עבור $a = -i$ נקבל את המערכת:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -i-2 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2+i \end{array} \right) \xrightarrow{R_3+5R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} -i-2 & 1 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+i \end{array} \right)$$

נשים לב כי השורה השלישית הינה שורת סתירה, ולכן עבור $a = -i$ למערכת אין פתרונות.

סה"כ נקבל כי:

עבור $a \neq \pm 2, \pm i$ יש פתרון יחיד.

עבור $a = 2$ יש אינסוף פתרונות.

עבור $a = -2, \pm i$ אין פתרונות.

2. (40 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל השדה F , ויהיו $U, W \leq V$ תתי מרחב של V .

א. יהיו $v_1, v_2 \in V$ כך ש $v_1, v_2 \in W$ וכן $v_1 + v_2 \in U$.

הוכיחו או הפריכו: $v_1, v_2 \in U \cap W$.

פתרון:

הפרכה

נביט במרחב המ-יות (מעל הממשיים) מסדר 2: $V = \mathbb{R}^2$, כאשר $W = V = \mathbb{R}^2$ וכן $U = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$ (קל לוודא כי U הוא תמ"ו של V).

כמו כן, נבחר $v_1 = \begin{pmatrix} 17 \\ 42 \end{pmatrix}$ וכן $v_2 = \begin{pmatrix} -17 \\ -42 \end{pmatrix}$. $v_1, v_2 \in W$ ואכן $v_1 + v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$.

אבל, מתקיים כי $U \cap W = U$ (שהרי $U \subseteq W$) והרי $\begin{pmatrix} 17 \\ 42 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -17 \\ -42 \end{pmatrix} \notin U$.

ב. יהיו $v_1, v_2 \in V$ כך ש $v_1 \in W$ וכן $v_2 \in U$.

הוכיחו או הפריכו: אם $v_1 - v_2 \in U \cap W$ אזי $v_1 + v_2 \in U \cap W$.

פתרון:

הוכחה

כיוון ש $v_1 - v_2 \in U$ נמצא בחיתוך, מתקיים ש $v_1 - v_2 \in W$ וגם $v_1 - v_2 \in U$.
כעת, כיוון ש $v_2 \in U$ נובע מתכונות המ"ו של U ש:

$$(v_1 - v_2) + v_2 = v_1 \in U$$

וכמו כן, כיוון ש $v_1 \in W$ נובע מתכונות המ"ו של W ש:

$$(v_1 - v_2) - v_1 = -v_2 \in W$$

ולכן גם $v_2 \in W$.

עכשיו, כיוון ש $v_1, v_2 \in U, W$ – נובע מתכונת הסגירות לחיבור כי $v_1 + v_2 \in U, W$.

ולכן נקבל כי: $v_1 + v_2 \in U \cap W$.

■ משל