הצבות טריגונומטריות

מטרה: לפטר מהשורש

אם בסוגסגל מופיע אחד מהביטויים $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$:

כאשר $a>0$ נשתמש בהצבות הבאות:

א) אם מופיע $\sqrt{a^2-x^2}$ נשתמש בהצבה $x=a\sin\theta$

ב) אם מופיע $\sqrt{a^2+x^2}$ נשתמש בהצבה $x=a\tan\theta$

ג) אם מופיע $\sqrt{x^2-a^2}$ נשתמש בהצבה $x=\frac{a}{\cos x}=a\sec x$ (סיקאנט)

$\frac{1}{\sin x}=\operatorname{cosec} x$ (קוסיקאנט)

דוגמה: נחשב את:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$$

פתרון: נציב: $x=2\sin\theta$, ולכן $\frac{dx}{d\theta}=2\cos\theta\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=\int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\sin\theta)^2\sqrt{4-4\sin^2\theta}}=\int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\sin\theta)^2(2\cos\theta)}$$

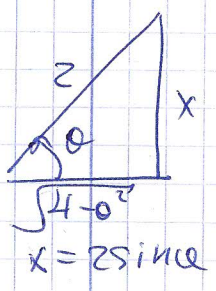
$$=\frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\sin^2\theta}=-\frac{1}{4}\cot\theta+C$$

לאחר הפתרון עלינו לבטא את $\cos\theta$ באמצעות x, לצורך כך נשתמש בכלי עזר טריגונומטרי הוא המשולש

מהצבה: $x=2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=x/2$

לכן מן האור שרטוט:

$$\cot\theta=\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$



ולכן:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{4}\cot\theta+C=-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}+C$$

דוגמה:

(חשב את:) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$

פתרון: (נסמנים כך:) $x = a\tan\theta$

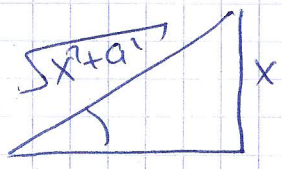
$dx = \frac{a}{\sin^2\theta}\, d\theta$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{\frac{a}{\sin^2\theta}\, d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}} = \int \frac{a\,\frac{1}{\sin^2\theta}\, d\theta}{\frac{a}{\cos\theta}} = \int \frac{\frac{a}{\sin^2\theta}}{\frac{a}{\cos\theta}}\, d\theta =$$

$$= \int \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\, d\theta = \cancel{\ln\left|\frac{1}{\sin\theta}+\tan\theta\right|+c} \; \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|+c$$

כדי לבטא את הפתרון בחזרה ל x, (אור את)

המשולש 2 בעזרת



$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}$ $\tan\theta = \frac{x}{a}$

$x = a\tan\theta$

לכן:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+c$$

דוגמה:

(חשב את:) $\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\, dx$

פתרון: $x = \frac{5}{\cos\theta}$ $dx = \frac{5}{\cos\theta}\cdot\tan\theta\, d\theta$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\, dx = \int \frac{\sqrt{\frac{25}{\cos^2\theta}-25}}{\frac{5}{\cos\theta}}\left(\frac{5}{\cos\theta}\cdot\tan\theta\right) d\theta =$$

$$= \int \frac{5\tan\theta}{\frac{5}{\cos\theta}}\left(\frac{5}{\cos\theta}\tan\theta\right) d\theta = 5\int \tan^2\theta\, d\theta =$$

$$= 5\int\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right) d\theta = 5\tan\theta - 5\theta + c$$

כדי לבטא את האינטגרל x נאלץ את

הפונקציה:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-25}}{5}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx = \sqrt{x^2-25} - 5\arccos\left(\frac{5}{x}\right) + C$$

הערה: ניתן כללית לחשב את

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad , \quad a>0$$

בעזרת הצבה טריגונומטרית.

אינטגרל של פונקציה ~~רציונלית~~ טריגונומטרית

דוגמה א'

הם האינטגרלים מהצורה:

$$\int \cos ax \cos bx\,dx \qquad \int \sin ax \cos bx\,dx \qquad \int \sin ax \sin bx\,dx$$

בכל אחד מהם מדרון הזהויות (שאמנם כבר היו טריגו):

1) $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

2) $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$

3) $2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)$

דוגמה: חשב את $\int \sin 3x \cos 7x\,dx$

פתרון:

$$\int \sin 3x \cos 7x\,dx = \frac{1}{2}\int (\sin 10x - \sin 4x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{20}\cos 10x + \frac{1}{8}\cos 4x + C$$

דוגמה ב' דוגמה זו כללית אינטגרל מהצורה

$$\int \sin^m x \cos^n x\,dx$$

~~דוגמה~~ כאשר m,n שלמים ולפחות אחד

מהם אי זוגי.

אבחנה:

1. אם n אי זוגי אז חפש גורם של $\cos x$,
והשתמש בזהות $\cos^2 x = 1-\sin^2 x$, הצב $u=\sin x$

2. m אי זוגי אז חפש גורם של $\sin x$, השתמש
בזהות $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, הצב $u=\cos x$

דוגמה:

$$\int \frac{dx}{\cos x}$$

פתרון: (אין לי אינטיות לי שייך לדרגה ג'
למרות שמעבר השטון לי לא נראה ק. ניתן לרשום
זאת $\frac{1}{\cos x}$ ע"י $\cos^{-1} x \sin^0 x$ ולהשתמש
בנוסחא הבאה מהדף הבא.

(נשתמש בהצבה $t=\sin x$ לכן $dt = \cos x\, dx$
לפרטים כאן סליד הבא:

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x\, dx}{\cos^2 x} = \int \frac{dt}{1-t} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)+\ln(1+t)\right]+C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}+C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}+C$$

הסעיף ג': בהסעיף זה נכללים כל האינטגרלים
מן הצורה $\int \sin^m x \cos^n x\, dx$ כאשר n, m מספרים
שלמים זוגיים שליליים. במידה לי נתון לפונקציה
אז אולם הזהויות m, n ע"י שימוש בפונקציה
הטריגונומטרית הבאות:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$2\sin^2 x = 1-\cos 2x$$

$$2\cos^2 x = 1+\cos 2x$$

דוגמה: (חישוב $\int dx$)

$$\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx$$

פתרון:

$$\int \sin^4 x \cos^4 x\,dx = \int (\sin^2 x)^2 (\cos^2 x)^2\,dx =$$

$$= \int \left(\tfrac{1}{2}[1-\cos 2x]\right)^2 \left(\tfrac{1}{2}[1+\cos 2x]\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{16}\int (1-\cos^2 2x)^2\,dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x\,dx =$$

$dt = 2dx$ $\quad t = 2x$ $\quad$ (נקבל)

$$= \frac{1}{32}\int \sin^4 t\,dt = \frac{1}{32}\int (\sin^2 x)^2\,dx =$$

$$= \int \left[\tfrac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\,dx$$

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x) = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4x$$

$$\int \sin^4 x\,dx = \frac{1}{4}\int \left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)dx =$$

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

$$= \frac{3}{8}t - \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + c =$$

$$= \left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{32}\sin 8x + c\right]\cdot\frac{1}{32}$$

דוגמה ג' בדומה לו נגלה לאינטגרלים
מן הצורה $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ כאשר R היא
פונקציה רציונלית של שני משתנים.
לאינטגרל מסוג זה ניתן לפרוק לאינטגרל
של פונקציה רציונלית במשתנה יחיד t ע"י הציבה
$t = \tan\frac{x}{2}$ ובכך נפטרים מהפונקציה
ונפטרים מהפונקציה הטריגונומטרית.

הערה: יש לשים לב לכך כי הצבה זו כוללת באופן
לא נאמן הצבות רציונליות, כלומר הפונקציה
טריגו' גם עבור נאמן הצבות רציונליות, אם כי הדרך
שהפנו עבור נאמן הצבות רציונליות יותר ארוכה.

ע"י שימוש בזהויות טריגונומטריות בסיסיות
ניתן לבטא את $\sin x$ ואת $\cos x$ באמצעות
באופן הבא:

$$(*) \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan x \ \frac{2t}{1-t^2}$$

מן ההצבה $t = \tan\frac{x}{2}$ נובע ש"ל כי $x = 2\arctan x$
לכן נקבל ש"ל כי:

$$(**) \quad x = 2\arctan t \ , \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

דוגמה: נחשב את

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3}$$

פתרון: נשתמש ~~בהצבה~~ בהצבה $t = \tan\frac{x}{2}$
בנוסחאות $(*)$ + $(**)$ ונקבל:

$$\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{4t}{1+t^2} + 3} = \int \frac{2dt}{1-t^2+4t+3+3t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{2t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{t^2+2t+2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2+1} =$$

$$= \arctan(t+1) + C = \arctan\left(1+\tan\frac{x}{2}\right) + C$$

אינטגרל - סיום

הגדרה: תהי f פונ' רציפה בקטע $[a,b]$.
השטח בין גרף של f לציר - x בקטע $[a,b]$
מוגדר ע"י:

מספרים a,b מגדירים תחום ושטח תחום של אינטגרל

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k = \underbrace{A}_{\text{השטח}} \quad (*)$$

שווה מספר מסוים. הגבול הזה נקרא אינטגרל רימן של $[a,b]$

דוגמה: נמצא את השטח שמתחת לישר $y=x$ ומעל לקטע $[0,2]$ בהתבסס על נוסחה (*) כאשר x_k^* יהיו קצה ימני של כל תת-קטע.

פתרון: אם נחלק את הקטע $[1,2]$ ל- n חלקים שווים, אורך כל אחד יהיה:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{n} = \frac{1}{n}$$

$$x_k^* = a + k\Delta x = 1 + \frac{k}{n}$$

לכן שטח המלבן ה- k-י הוא:

$$f(x_k^*)\,\Delta x = x_k^*\,\Delta x = \left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

וסכום השטחים של n המלבנים הוא:

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{n}\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 + \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\cdot n + \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right] =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2n}$$

ומכאן ש:

$$\int_1^2 x\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum f(x_k^*)\,\Delta x_k = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}\right) = \frac{3}{2}$$

הגדרה: השטח נקרא בין $y=f(x)$ ל $[a,b]$ וכולל לא-יל חיובי, שלילי או אפס. הגבול הזה השטח

אם לדרך סגולה מ-נשמר שאתה, עליו הראה
הנשמר אתה לדרך סגולה מ-נשמר שאתה
לאופס הראשי הנשמר אם לדרך שלה לנשמר שאתה!

(אינטגרביליות) **הגדרה:** תהי f פונקציה המוגדרת בדרך הסגור $[a,b]$. (אומר ש-f אינטגרבילית רימן ב $[a,b]$) לפרוצדורה אינטגרבילית ב $[a,b]$ אם קיים

$$\lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ האינטגרל המסוים של f מ a ל b מוגדר:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x_k$$

תכונות:

א. אם a הוא מתחום של f אזי $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

ב. אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$ אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

ג.

$$\int_a^b [\alpha f(x) \pm \beta g(x)]\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx \pm \beta\int_a^b g(x)\,dx$$

ד. אם f אינטגרבילית בדרך סגור המכיל a,b,c אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

ה. אם $f(x) \geq 0$ לכל $x \in [a,b]$ אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

ו. אם $f(x) \geq g(x)$ לכל $x \in [a,b]$ אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

X **דוגמה:** הראה שהאינטגרל $\int_0^1 \frac{x\cos x}{2x^3-5}\,dx$ הוא שלילי

פתרון: מכיוון ש $0 \leq x \leq 1$ האינטגרנד הוא שלילי כי $\cos x > 0$ ו $2x^3-5<0$ ולכן לפי אחד מ-ו האינטגרל הוא שלילי.

~~ז. אם f חסומה בקטע [a,b] אזי~~

~~$m \leq f(x) \leq M$~~

X **משפט:** אם f פונקציה מונוטונית בכל תחום בקטע $[a,b]$.

אז. אם f רציפה ב $[a,b]$ אז f אינטגרבילית

בז. אם f חסומה ב $[a,b]$ ויש לה מספר סופי של נקודות אי-רציפות ב $[a,b]$ אז f אינטגרבילית ב $[a,b]$

גז. אם f יורדת חסומה ב $[a,b]$ אז f אינטגרבילית ב $[a,b]$.

איך מחשבים אינטגרל מסוים?

משפט היסוד הראשון של החשבון - גזירה ואינטגרציה

אם f רציפה בקטע $[a,b]$ ו F הוא פונקציה קדומה של f ב $[a,b]$ אזי:

$$\left[\int f(x)\,dx\right]_a^b = \int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

הערה: ~~בלא הוכחה~~ ראינו שמחשבים אינטגרל מסוים לא לכל מנה בא לו פונקציה קדומה ולכן נוכל לעזור שקבוע $C=0$.

דוגמה:

$$\int_0^6 f(x)\,dx$$

כאשר

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & x<2 \\ 3x-2 & x\geq 2 \end{cases}$$

פתרון:

$$\int_0^6 f(x)\,dx=\int_0^2 f(x)\,dx+\int_2^6 f(x)\,dx=\int_0^2 x^2\,dx+\int_2^6 (3x-2)\,dx=$$

$$=\frac{x^3}{3}\Big|_0^2+\left[\frac{3x^2}{2}-2x\right]_2^6=\left(\frac{8}{3}-0\right)+(24-2)=\frac{178}{3}$$

דוגמה:

$$\int_{-1}^2 |x|\,dx=\int_{-1}^0 |x|\,dx+\int_0^2 |x|\,dx=$$

$$=\int_{-1}^0 -x\,dx+\int_0^2 x\,dx=-\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0+\frac{x^2}{2}\Big|_0^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$$

משפט: תהי $f(x)$, $g(x)$ שתי פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$:

א. אם $m\leq f(x)$ לכל $x\in[a,b]$ אזי

$$(b-a)m\leq\int_a^b f(x)\,dx$$

ב. אם $f(x)\leq M$ לכל $x\in[a,b]$ אזי

$$\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

~~הוכחה~~

מסקנה: אם $f(x)$ פונקציה אינטגרבילית ב $[a,b]$ ותהי M – סופרמום של $f(x)$ בקטע, ו- m – infimum של בקטע אזי

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)\,dx\leq M(b-a)$$

~~מסקנה (הערכה)~~

בעזרת אי־שוויון דוגמא ניתן לראות כמה אינטגרלים:

א. $\int_0^2 e^{x^2}dx$

פתרון: בקטע $[0,2]$ מתקיים $1\le e^{x^2}\le e^4$ ולכן

$$2\le \int_0^2 e^{x^2}dx \le 2e^4$$

ב. $\int_{-4}^{2} \sqrt{1+x^2}\,dx$

פתרון: בקטע $[-4,2]$ מתקיים $1\le \sqrt{1+x^2}\le \sqrt{17}$

ולכן: $6\le \int_{-4}^{2}\sqrt{1+x^2}\,dx \le 6\sqrt{17}$

ג. $\int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^2}$

פתרון: בקטע $[-1,3]$ מתקיים $\frac{1}{10}\le \frac{1}{1+x^2}\le 1$

ולכן: $\frac{2}{10}\le \int_{-1}^{3}\frac{dx}{1+x^2}\le 4$

הצבות של אינטגרלים מסוימים

כלל המשתנה: אם $f(x)$ פונק' רציפה בקטע $[a,b]$ ואם $x=g(t)$ פונקציה גזירה בקטע $[\alpha,\beta]$ ואם קיים תחום שלה בקטע $[a,b]$ כך ש $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$, אזי:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

דוגמא:

ד) חשב את $\int_2^3 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$

פתרון: נציב $t=\sqrt{4-x^2}$, אזי ניתן לדבר על x כפונקציה של t ע"י

$t^2=4-x^2 \Rightarrow x^2=4+t^2 \Rightarrow x=g(t)=\sqrt{4+t^2}$

אותו הפונקציה $g(t)$, הגבול $x=2$ מתאים
ל $t=0$ הגבול $x=3$ מתאים ל
$t=\sqrt{5}$

$$g'(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}} \Rightarrow g'(t)\,dt=\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4}}$$

אם (סעיף) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$ אזי $f(g(t))=\frac{t}{\sqrt{t^2+4}}$

לכן נוכל לשנות בנוסחה:

$$\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\,dx=\int_0^{\sqrt{5}} f(g(t))\cdot g'(t)\,dt=$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}} \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}\cdot\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+4}}=\int_0^{\sqrt{5}}\frac{t^2}{t^2+4}\,dt=$$

$$=\int_0^{\sqrt{5}}\frac{t^2+4-4}{t^2+4}\,dt=\int_0^{\sqrt{5}}\left[1-\frac{4}{t^2+4}\right]dt=t-2\arctan\frac{t}{2}\Big|_0^{\sqrt{5}}=$$

$$=\sqrt{5}-2\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}$$

2.

$$\cancel{\int_0^a \sqrt{(a^2-x^2)^3}\,dx \neq}$$

<u>משפט</u>: אם $f(x)$ זוגית ורציפה ב $[-a,a]$
אזי:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

ואם f אי זוגית ב $[-a,a]$ אזי

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$$

<u>דוגמה</u>: חשב את האינטגרלים:
א.

$$\int_{-2}^{2} x^2\sin x\,dx$$

<u>פתרון</u>: x^2 זוגית, $\sin x$ אי זוגית ← $[-2,2]$
לכן

$$\int_{-2}^{2} x^2\sin x\,dx=0$$

ג) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$

פתרון: $\sqrt{1-x^2}$ זוגית ב $[-1,1]$ לכן

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = 2\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

(רמז $x=\cos x$ $\quad dx=-\sin t\,dt$

$\cos x = 1 \Rightarrow x=0$

$\cos x = 0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$

$$2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sqrt{1-\cos^2 t}\,(-\sin t)\,dt = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt =$$

$$= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t\right] dt = \left[t - \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

אינטגרציה בחלקים

תהי לפונקציות $u(x), v(x)$ יש נגזרות רציפות בקטע $[a,b]$ אזי:

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

דוגמה: חשב את $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

פתרון: (סימן) $u(x)=x \quad v'(x)=\sin x\,dx$

$u'(x)=1\cdot dx \quad v(x)=-\cos x$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = -x\cos x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx =$$

$$= [-\pi\cos\pi + 0] + \sin x\Big|_0^{\pi} = \pi$$

המשפט היסודי השני של חדו"א

אם $f(x)$ פונק' רציפה ב (a,b) ואם c נקודה כלשהי בתחום. אזי הפונקציה

$$F(x)=\int_c^x f(t)\,dt$$

היא פונקציה קדומה של $f(x)$ בתחום (a,b).

מסקנה:

אם f רציפה ב (a,b) ואם c נקודה כלשהי בתחום אזי:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_c^x f(t)\,dt\right)=f(x)$$

הע'. אם $\alpha(x),\beta(x)$ פונקציות גזירות ואם $f(x)$ רציפה, אזי:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt\right]=f(\beta(x))\beta'(x)-f(\alpha(x))\alpha'(x)$$

דוגמאות: חשב את הפונקציה הבאה:

א.

$$I(x)=\int_2^x e^{-t^2}\,dt$$

פתרון:

$$\frac{d}{dx}(I(x))=I'(x)=e^{-x^2}$$

ב.

$$I(x)=\int_1^{x^3}\frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

פתרון: נשתמש בדוגמה א' את הפונקציה $x^3=u(x)=u$ ונשתמש

$$J(u)=\int_1^u\frac{\ln t}{t^2}\,dt$$

ברור כי $I(x)=J(u(x))$ ולכן לפי כלל השרשרת

$$I'(x)=J'(u)\cdot u'(x)=\frac{\ln u}{u^2}\cdot 3x^2=\frac{\ln x^3}{(x^3)^2}\cdot 3x^2=\frac{9\ln x}{x^4}$$

ג.

$$F(x) = \int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^8}} \cdot 2x - \frac{1}{\sqrt{1+t^{12}}} \cdot 3x^2 = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{3x^2}{\sqrt{1+t^2}}$$

<u>שימושים</u>: למשל:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin t^2 \, dt}{x^6} \underset{\text{לופיטל}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{2x \sin x^4}{6x^5} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^4}{3x^4} = \frac{1}{3}$$