משתנים מקריים בדידים, תוחלת ושונות

משתנה מקרי ממשי (מ"מ) X: פונקציה ממרחב המדגם לישר הממשי $X:\Omega \to \mathbb{R}$.

תוחלת של משתנה מקרי

$$E(X)=\sum_k k\cdot P(X=k)$$

טרנספורמציה לינארית: $E(aX+b)=aE(X)+b$

כאשר $g(X)$ פונקציה של מ"מ, התוחלת שלה: $E[g(X)]=\sum_k g(k)\cdot P(X=k)$

שונות של משתנה מקרי

$$Var(X)=E\{(X-E[X])^2\}=E(X^2)-[E(X)]^2$$

טרנספורמציה לינארית: $Var(aX+b)=a^2\cdot Var(X)$

שאלה 3

מסובבים 2 סביבונים זהים. על הפאות של כל סביבון מסומנים המספרים $\{1,1,2,3\}$.

א. נגדיר משתנה מקרי X = סכום 2 הסיבובים. מצא את התפלגות X.

ב. חשב את התוחלת והשונות של X.

ג. נגדיר משתנה חדש: $Y=4X-17$. מצא את התוחלת והשונות של Y.

ד. נגדיר משתנה חדש נוסף: $Z=(X-5)^2$. מצא את התפלגות Z וחשב את השונות שלו.

פתרון:

א). הערכים האפשריים של X הם- 2,3,4,5,6 וההסתברויות נתונות בטבלה הבאה:

$\{\omega\}$	$\{(1,1)\}$	$\{(1,2),(2,1)\}$	$\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$	$\{(2,3),(3,2)\}$	$\{(3,3)\}$
X	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16

חישוב התאים:

$$P(X=2)=P(1)\cdot P(1)=1/2\cdot 1/2=1/4$$

$$P(X=3)=P(1)\cdot P(2)+P(2)\cdot P(1)=2\cdot 1/2\cdot 1/4=1/4$$

$$P(X=4)=P(1)\cdot P(3)+P(2)\cdot P(2)+P(3)\cdot P(1)=(1/2\cdot 1/4)+(1/4\cdot 1/4)+(1/4\cdot 1/2)=5/16$$

$$P(X=5)=P(2)\cdot P(3)+P(3)\cdot P(2)=2\cdot 1/4\cdot 1/4=1/8$$

$$P(X=6)=P(3)\cdot P(3)=1/4\cdot 1/4=1/16$$

(נשים לב שסכום התאים הוא 1) .

ב). התוחלת של X:

$$E(X)=\sum_k k\cdot P(X=k)=2\cdot 1/4+3\cdot 1/4+4\cdot 5/16+5\cdot 1/8+6\cdot 1/16=3.5$$

נוסחת העבודה לשונות של X: $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

חישוב עזר-

$$E(X^2)=\sum_k k^2\cdot P(X=k)=2^2\cdot 1/4+3^2\cdot 1/4+4\cdot 5/16+5^2\cdot 1/8+6^2\cdot 1/16=13.625$$

והשונות: $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=13.625-3.5^2=1.375$

Scanned by CamScanner

ג). המ"מ Y הוא טרנספורמציה לינארית של המ"מ X, לכן

$$E(Y)=E(4X+5)=4\cdot E(X)+5=4\cdot 3.5-17=-3$$

$$V(Y)=V(4X+5)=4^2\cdot V(X)=16\cdot 1.375=22$$

ד). נבנה את טבלת ההתפלגות של המשתנה Z (בהתייחס לטבלה המקורית):

X	2	3	4	5	6
P(X=k)	1/4	1/4	5/16	1/8	1/16
$Z=(X-5)^2$	9	4	1	0	1

נשים לב ש- Z מקבל רק 4 ערכים: $Z=\{0,1,4,9\}$, כלומר טבלת ההתפלגות שלו:

Z	0	1	4	9
$Z=(X-5)^2$	1/8	6/16	1/4	1/4

נוסחת השונות של Z: $Var(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2$. נחשב כ"א מהמרכיבים

$$E(Z)=\sum_k k\cdot P(X=Z)=9\cdot 1/4+4\cdot 1/4+1\cdot(5/16+1/16)+0\cdot 1/8=3.625$$

$$E(Z^2)=\sum_k k^2\cdot P(X=Z)=9^2\cdot 1/4+4^2\cdot 1/4+1^2\cdot(5/16+1/16)+0^2\cdot 1/8=24.625$$

השונות המבוקשת: $Var(Z)=E(Z^2)-[E(Z)]^2=24.625-3.625^2=\cancel{17.734}$ 11.484 ✓

שאלה 4

משתנה מקרי X מקבל את הערכים ...0,1,2 בהסתברות $P(X=i)=\frac{C}{3^i},\quad i=0,1,2...$

א. מצא את הערך של הקבוע C. ✓
ב. את התוחלת של X. ✓
ג. את ההסתברות ש- $X>5$. ✓
ד. את ההסתברות ש-X לא זוגי. ✓

פתרון:

א). מכיוון שנתונה פונ' הסתברות צ"ל $\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)=1$

$$1=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{C}{3^i}=1=C\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^i\quad\Rightarrow 1=C\cdot\left(\frac{1}{1-1/3}\right)\quad\Rightarrow C=2/3$$ לכן

סכום סדרה הנדסית $(|q|<1)$ $\sum_k a_k=\frac{a_1}{1-q}$

ב). התוחלת:

$$E(X)=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot P(X=i)=\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot(2/3)\cdot\frac{1}{3^i}=2/3\cdot\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot\frac{1}{3^i}$$

$$=\frac{2}{3}\left[1\cdot(1/3)+2\cdot(1/3)^2+3\cdot(1/3)^3+...\right]=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1+2\cdot 1/3+3\cdot(1/3)^2+....\right).$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{1}{3^{i-1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{3^i}\right)'}_{(***)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{1-q}\right)'=\frac{1}{(1-q)^2}\quad\Rightarrow\left(\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot\frac{1}{3^i}\right)'=\frac{1}{(1-1/3)^2}=\frac{9}{4}\ (***)$$

$$\left(\sum\left(\frac{1}{3}\right)^i\right)'$$

ג). ההסתברות לערכים הגדולים מ-5:

$$P(X>5)=1-P(\le 5)=1-2/3\cdot\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{0}+\left(\frac{1}{3}\right)^{1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{4}+\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\right)=0.00137$$

ד). הסתברות לערכים אי זוגיים:

$$P(X\ odd)=1-P(X\ even)$$

$$=1-\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k)=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{3^{2k}}=1-2/3\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^{k}$$

$$=1-2/3\cdot\left(\frac{1}{1-1/9}\right)=1-3/4=1/4$$