פתרון מבחן לדוגמא – מבוא לאנליזה 2 למורים – 88-612-01

זמן המבחן: 3 שעות. חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 24 נק', ענו על כל השאלות.

1. חשבו את:

א. $\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx$

נבצע הצבה:

$$\int \sin^2(x)\cos^3(x)dx = \left\{\begin{matrix} t=\sin(x) \\ dt=\cos(x)dx \end{matrix}\right\} = \int t^2\left(1-t^2\right)dx = \frac{t^3}{3}-\frac{t^5}{5}+C = \frac{\sin^3(x)}{3}-\frac{\sin^5(x)}{5}+C$$

ב. $\int \frac{x^4+1}{x^3-1}dx$

ראשית נבצע חילוק פולינומים ונקבל כי

$$\frac{x^4+1}{x^3-1} = x+\frac{x+1}{x^3-1}$$

לכן

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-1}dx = \frac{x^2}{2}+\int \frac{x+1}{x^3-1}dx$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{x+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{(x-1)\left(x^2+x+1\right)} = \frac{2}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{3}\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

לכן סה"כ

$$\int \frac{x^4+1}{x^3-1}dx = \frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln\left|x^2+x+1\right|+C$$

.2

א. מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\frac{x}{e^x-1}$

<u>אסימפטוטות אנכיות</u>:

הפונקציה אינה רציפה ב $x=0$ נבדוק שם את הגבול.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$$

לכן אין אסימפטוטה אנכית.

<u>אסימפטוטה משופעת מימין</u>:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x-1}=0$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1}-0\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

ולכן $y=0$ אסימפטוטה משופעת (אופקית) מימין.

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל</u>:

$$m=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{1}{e^x-1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x}{e^x-1}+x=\lim_{x\to(-\infty)}\frac{xe^x}{e^x-1}$$

המכנה מתכנס למינוס אחד, את גבול המונה נחשב בנפרד:

$$\lim_{x\to(-\infty)}xe^x\overset{-\infty\cdot 0}{=}\lim_{x\to(-\infty)}\frac{x}{e^{-x}}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{=}}\lim_{x\to(-\infty)}\frac{1}{-e^{-x}}=0$$

לכן $n=0$ והישר $y=-x$ הוא אסימפטוטה משופעת משמאל.

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx$

ראשית כפי שראינו $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}=1$ ולכן הנקודה הבעייתית היחידה היא ∞.

נבצע מבחן השוואה גבולי עם $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x-1}\cdot x^2=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=0$$

(קל לחשב את הגבול לעיל באמצעות לופיטל.)

לכן כיוון שהאינטגרל הגדול יותר $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ מתכנס, בוודאי האינטגרל $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}dx$ מתכנס.

.3

א. חשבו את הגבול $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{\left(t^2\right)}dt}{1-\cos(x)}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} e^{\left(t^2\right)}dt}{1-\cos(x)}\underset{L'Hopital}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x^4}}{\sin(x)}=\lim_{x\to 0}2e^{x^4}\cdot\frac{x}{\sin(x)}=2$$

ב. חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$

נראה שמדובר בסכומי רימן של הפונקציה הרציפה $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{n^2}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\to\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan\left(1\right)-\arctan\left(0\right)=\frac{\pi}{4}$$

.4

א.   קרבו את $\int_0^{0.5} \frac{1}{x^4+1}dx$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{10,000}$.

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

נציב $-x^4$ במקום x :

$$\frac{1}{1+x^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^{4n}$$

כעת נחשב את האינטגרל:

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{x^4+1}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{0.5}\left(-1\right)^n x^{4n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{(4n+1)2^{4n+1}}$$

מדובר בטור לייבניץ, לכן עלינו לסכום את האיברים עד ולא כולל האיבר הראשון שקטן מהשגיאה:

$$\int_0^{0.5}\frac{1}{x^4+1}dx\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{5\cdot 2^5}+\frac{1}{9\cdot 2^9}$$

ב.   חשבו את $f^{(48)}(0)$ עבור $f(x)=x^2e^{2x}$.

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

נציב $2x$ במקום x :

$$e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^n}{n!}$$

נכפול ב x^2 ונקבל כי:

$$x^2e^{2x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n x^{n+2}}{n!}$$

המקדם של x^{48} הוא $\frac{2^{46}}{46!}$ ולכן $\frac{2^{46}}{46!}=\frac{f^{(48)}(0)}{48!}$

סה"כ $f^{(48)}(0)=2^{46}\cdot 47\cdot 48$

5. תהי $f(x)$ פונקציה גזירה ואי שלילית, כלומר לכל x מתקיים $0 \le f(x)$.

נגדיר את הפונקציה $g(x) = x\int_0^x f(t)dt$.

א. הוכיחו כי הפונקציה $g(x)$ מונוטונית עולה בתחום $[0,\infty)$.

ראשית נזכור שכיוון ש f רציפה, מתקיים שהיא שווה לנגזרת של פונקצית השטח שלה, כלומר

$$\left(\int_0^x f(t)dt\right)' = f(x)$$

לכן $g'(x) = \int_0^x f(t)dt + xf(x)$ כיוון ש $0 \le f(x)$ נובע שגם $0 \le \int_0^x f(t)dt$ לכל $0 \le x$.

סה"כ לכל $0 \le x$ מתקיים כי $0 \le g'(x)$ ולכן $g(x)$ מונוטונית עולה.

ב. נניח בנוסף כי $f(x)$ מונוטונית עולה, הוכיחו כי $g(x)$ מחייכת (קמורה) בתחום $[0,\infty)$.

נגזור פעם נוספת, $g''(x) = f(x) + f(x) + xf'(x)$.

כיוון ש f עולה, נובע כי $f'(x) \ge 0$ ולכן סה"כ $g''(x) \ge 0$ כלומר $g(x)$ מחייכת.