תרגול מס' 9 בחשבון אינפי' 2

סדרות וטורים של פונקציות (המשך).

תרגיל: קבע התכנסות של הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}$.

פתרון: מתוך אי-שיוויון המשולש: $\forall x\in\mathbb{R}:\ |r_n(x)|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2}\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\cos kx}{k^2}\right|\le\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$.

הביטוי הימני שקיבלנו הוא שארית של טור המספרים: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ המתכנס, ולכן עפ"י קושי מתקיים לגביו:

$r_n\xrightarrow{n\to\infty}0$. לכן גם: $r_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$, ומכאן שהטור שלנו מתכנס במ"ש בכל הישר.

מהתרגיל האחרון נוכל להסיק באופן כללי יותר את המשפט הבא:

משפט - מבחן ה-M של ווירשטראס: יהא $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ טור פונקציות מוגדר בקטע I. אם קיים טור מספרים חיובי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס, כך ש: $\forall k\in\mathbb{N},\ \forall x\in I:\ \ |f_k(x)|\le a_k$ אזי $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I.

תרגיל: הוכח כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}x^k(1-x)^k$ מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$.

פתרון: נמצא את המקסימום של: $x(1-x)=x-x^2$ בקטע $[0,1]$ ע"י גזירה ואיפוס:

$x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ 1-2x=0$ כמו כן: $(1-2x)'=-2<0$ כלומר זו נק' מקסימום (ובקצוות הביטוי מתאפס).

ולכן מתקיים: $\forall x\in[0,1]:\ 0\le x(1-x)\le\frac{1}{4}$ ומכאן: $\forall k\ge1,\ \forall x\in[0,1]:\ 0\le x^k(1-x)^k\le\frac{1}{4^k}$.

הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^k}$ מתכנס, ולכן עפ"י מבחן ה-M של ווירשטראס הטור שלנו מתכנס במידה שווה בקטע $[0,1]$.

תרגיל: הוכח כי אם $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס בהחלט, אזי $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$ מתכנס במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

פתרון: בכל $\mathbb{R}$ מתקיים: $|\cos kx|\le 1$ ולכן מתקיים גם: $|a_k\cdot\cos kx|=|a_k|\cdot|\cos kx|\le|a_k|$.

כמו כן טור המספרים **החיובי** $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|$ מתכנס, שכן נתון כי הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס בהחלט. ולכן עפ"י מבחן ה-M של ווירשטראס הטור שלנו מתכנס במידה שווה בכל $\mathbb{R}$.

משפט: יהא $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ טור פונקציות רציפות המתכנס במ"ש בקטע I לפונקציית הסכום $S(x)$.

אזי $S(x)$ רציפה בקטע זה.

(התכנסות במ"ש של טור הפונקציות היא התכנסות במ"ש של הסס"ח שלו $\{S_n(x)\}$. לכל $n\in\mathbb{N}$, $S_n(x)$ הוא סכום <u>סופי</u> של פונקציות רציפות בקטע I, ולכן גם $S_n(x)$ רציפה בו. מכאן שפונקציית הגבול $S(x)$ בהכרח גם רציפה בו (משפט). □)

דוגמה: הראה שהפונקציה $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2x}{1+k^7x^2}$ רציפה בכל $\mathbb{R}$.

פתרון: נמצא מקסימום של $f_k(x)=\frac{k^2x}{1+k^7x^2}$:

$$f_k'(x)=k^2\left(\frac{x}{1+k^7x^2}\right)'=k^2\frac{1+k^7x^2-x\cdot 2xk^7}{\left(1+k^7x^2\right)^2}=k^2\frac{1-k^7x^2}{\left(1+k^7x^2\right)^2}$$

אם כן: $x=\pm\frac{1}{k^{3.5}}\quad\Leftrightarrow\quad f'(x)=0$. נציב ונקבל: $f_k\left(\frac{1}{k^{3.5}}\right)=\frac{k^{2-3.5}}{1+1}=\frac{1}{2k^{3/2}}$.

מכאן: $\frac{1}{2k^{3/2}} > \left|\frac{k^2x}{1+k^7x^2}\right| = \left|f_k(x)\right|$:$\forall x \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{N}$.

כעת ידוע כי הטור $\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k^{3/2}}$ מתכנס, ולכן עפ"י מבחן ה-M הטור שלנו מתכנס במידה שווה בקטע.

כלומר הסס"ח $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל- $S(x)$, וכיוון שהטור הוא טור של פונקציות רציפות אז גם פונקצית הגבול $S(x)$ חייבת להיות רציפה בקטע.

הערה: גם כאן ההיפך לא נכון – כלומר יתכן שטור של פונקציות יתכנס לא במידה שווה בקטע מסוים – לפונקצית גבול שהיא כן רציפה באותו הקטע. למשל $\sum_{k=1}^{\infty} x^k = \frac{x}{1-x}$ היא פונקציה רציפה בקטע $(-1,1)$ אבל הטור אינו מתכנס במ"ש בקטע $(-1,1)$.

אינטגרציה וגזירה איבר איבר בטורי פונקציות.

משפט: יהא $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור פונקציות רציפות בקטע $[a,b]$ המתכנס במ"ש בקטע לסכום $S(x)$. אזי:

1. הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx$ מתכנס.

2. מתקיים: $\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b S(x)dx$ (אפשר להחליף את סדר הסכום עם האינטגרל).

תרגיל: חשב את סכום הטור: $S = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k} = \frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{3\cdot 27}+\frac{1}{4\cdot 81}+\ldots$.

פתרון: נרשום: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty}\left.\frac{x^k}{k}\right|_{x=\frac{1}{3}}$ ונתבונן בטור הפונקציות: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

נבטא את האיבר הכללי בטור באמצעות אינטגרל מסוים: $\frac{x^k}{k}=\int_0^x t^{k-1}dt$ שהיא פונקציה של x.

מכאן ש: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x t^{k-1}dt$.

הטור שקיבלנו באגף ימין הוא טור של פונקציות רציפות המתכנס במ"ש בכל קטע $[-c,c]$ עבור $c<1$.

ניתן להראות זאת ע"י משפט ה-M של ווירשטראס שכן: $\forall k\in\mathbb{N},\forall x\in[-c,c]:\left|x^k\right|\le|c|^k$ והרי טור

המספרים החיובי $\sum_{k=1}^{\infty}|c|^k$ מתכנס. לכן עפ"י המשפט החלפת סדר האופרטורים אינטגרציה וסכום מותרת

ונקבל: $\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x t^{k-1}dt=\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{\infty}t^{k-1}\right)dt=\int_0^x\left(\sum_{k=0}^{\infty}t^k\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln|1-x|$ ומכאן ש: $S=\ln\frac{3}{2}$.

משפט: תהא $\{f_k(x)\}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$. אם הטור $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$

מתכנס (נקודתית) בקטע $[a,b]$ וטור הנגזרות $\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$,

אזי: $\sum_{k=1}^{\infty}f_k'(x)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\right)'=S'(x)$ (נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות).

דוגמה: חשב את סכום הטור: $S=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$.

פתרון: נבדוק מהו סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}kx^k$ עבור $|x|<1$ ונציב בסוף $x=\frac{1}{3}$. נשים לב כי: $\left(x^k\right)'=kx^{k-1}$.

כעת השאלה היא האם ניתן לכתוב (החלפת סדר סכום – נגזרות):

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^k=x\sum_{k=1}^{\infty}kx^{k-1}=x\sum_{k=1}^{\infty}\left(x^k\right)'\overset{?}{=}x\left(\sum_{k=1}^{\infty}x^k\right)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}$$

נראה כי טור הנגזרות הרציפות $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$ מתכנס במ"ש בכל קטע $[-c,c]$ עבור $c<1$.

עובדה זו נובעת ממשפט ה-M של ויירשטראס שכן: $\forall k \in \mathbb{N}: \left|kx^k\right| \le k|c|^k$ וטור המספרים החיובי $\sum_{k=1}^{\infty} k|c|^k$ מתכנס (למשל עפ"י מבחן קושי $L=|c|<1$). מכאן שהמעבר הנ"ל הוא מוצדק ו: $S=\frac{3}{4}$.