

מד"ר למתמטיקאים – פיתרון תרגיל 1

1. משוואה דיפרנציאלית עבור כל הישרים במרחק יחידה מהראשית :

ישר במרחק 1 מהראשית שמתואר כפונקציה y של x בעל משוואה

$y = mx + b$ או $mx - y + b = 0$. מגיאומטריה אנליטית אנו יודעים כי מרחק ישר הנתון על ידי $Ax + By + C = 0$ מנקודה (x_0, y_0) הוא :

ואצלנו , אם נדרוש שמרחק הישר מהראשית הוא 1 נקבל : $\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ומכאן עובר שיפוע נתון $y' = m$ ישרים במרחק 1 $1 = \frac{b}{\pm\sqrt{m^2 + 1}}$

מהראשית עם שיפוע כזה הם מהצורה :

$$y = y'x \pm \sqrt{y'^2 + 1} \quad \text{כי} \quad y' = m \quad \text{וקיבלנו עבור} \quad y = mx \pm \sqrt{m^2 + 1}$$

או : $(y'x - y)^2 = y'^2 + 1$ - פיתרון .

2.א. $y' \cot x + y = 2, y(0) = -1$:

Gמקיים את תנאי ההתחלה , והפיתרון שנקבל בהפרדת המשתנים והצבת תנאי ההתחלה הוא : $y = 2 - 3\cos x$ - פיתרון .

ב. $y' = \cos(y - x + 1)$:

לפי השיטה הכללית למשוואות מסוג זה נציב $z = y - x + 1$ ואז נקבל בגזירה לפי איקס : $y' = z' + 1 = \cos(z)$, או : $\frac{dz}{\cos(z) - 1} = dx$

ובהפרדת המשתנים ואחרי אינטגרציה נקבל פיתרון :

$$\cot\left(\frac{y-x+1}{2}\right) = x + C \quad \text{פיתרון .}$$

ג. $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$:

נציב

ונקבל : $z = 4x + 2y - 1$, $z' = 4 + 2y' \Leftrightarrow y' = \frac{z' - 4}{2} = \sqrt{z}$, מד"ר ב-

z . $\frac{dz}{2\sqrt{z} + 4} = dx \Leftrightarrow$ הפרדת משתנים ונקבל פיתרון למד"ר :

$$x + C = \sqrt{4x + 2y - 1} - 2\ln|2 + \sqrt{4x + 2y - 1}|$$

$$ד. \quad y - xy' = a(1 + x^2y') :$$

פשוט נבודד את y' ונקבל משוואה מופרדת :

$$: \quad \frac{dy}{y-a} = \frac{1}{x(1+ax)} , \quad \text{שפיתרונה (עם שימוש באינטגרציית שברים יסודיים ...)}$$

$$. \quad \boxed{y = a + C \frac{x}{ax+1}}$$

$$ה. \quad y' = \frac{4y-2x-6}{y+x-3}$$

נשתמש בשיטה של החלפת משתנים $u = x + a, v = y + b$ ל- a, b מתאימים כך ונשים לב כי $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$:

$$\begin{aligned} \frac{-2x+4y-6}{x+y-3} &= \frac{-2(u-a)+4(v-b)-6}{(u-a)+(v-b)-3} = \\ &= \frac{-2u+4v+[2a-4b-6]}{u+v+[-a-b-3]} \end{aligned}$$

נמצא a, b כך שהאיברים בסוגריים במונה ובמכנה יתאפסו .

נמצא : $a = -1, b = -2$ ונקבל אחרי הצבה : $\frac{dv}{du} = \frac{-2u+4v}{u+v}$ שהיא כבר הומוגנית (!) ובהצבת $z = \frac{v}{u}$ נקבל הפרדת משתנים

$$. \quad \text{מכאן נקבל פתרונות סיגולריים : } z = 1, z = 2 \quad \frac{dz}{du} = \frac{-(z-2)(z-1)}{(1+z)u}$$

שבשלב הזה z הוא פונקציה של u – פתרונות אלו מתאימים לפתרונות במשתנים המקוריים : $y = 2x, y = x + 1$. ואחרי שנפתור את המד"ר המופרדת נקבל פיתרון במונחי x, y :

$$\boxed{(y - 2x)^3 = C(y - x - 1)^2}$$

ובנוסף הפתרונות הסינגולאריים .

$$3. \quad 2xy' = 2y + \sqrt{x^2 + 4y^2} :$$

זו משוואה הומוגנית – ניתן להציגה :

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

(...) נקבל תשובה : $\boxed{1 + 4Cy - C^2x^2 = 0}$, עבור קבוע C

ב. $xy' = y \cos(\ln \frac{y}{x})$

גם זו משוואה הומוגנית ופתרונה : $\cot \left[\frac{\ln \frac{y}{x}}{2} \right] = \ln|x| + C$

4. א. $e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0$

פיתרון : $xe^{-y} - y^2 = C$

ב. $3x^2(1 + \ln y) dx = (2y - \frac{x^3}{y}) dy$

פיתרון : $x^3 + x^3 \ln y - y^2 = C$

5. שימוש בנתון על הומוגניות הפונקציה , ונניח כי $Pdx + Qdy = 0$

מראים ישירות על סמך חישוב כי $\frac{1}{xP+yQ} [Pdx + Qdy] = 0$ היא מד"ר מדוייקת בעזרת קיום תנאי המדוייקות וזהות אויילר !

6. נרצה למצוא גורם אינטגרציה μ , כלומר שיתקיים כי $\mu Pdx + \mu Qdy = 0$ מדוייקת ו- μ פונקציה של $t = x^2 + y^2$.

תנאי מדוייקות הוא : $\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ ואחרי פיתוח הנגזרות האלו נקבל עבור הצגה $\mu = \mu(t(x, y)), t = x^2 + y^2$, ומכאן התנאי המדוייקות :

$$\frac{d\mu}{dt} \frac{\partial t}{\partial y} P + \mu \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial t}{\partial x} Q + \mu \frac{\partial Q}{\partial x}$$

(כלל השרשרת).

מזה נקבל : $\frac{\mu'(t(x,y))}{\mu} = \frac{[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}]}{[\frac{\partial t}{\partial y} P - \frac{\partial t}{\partial x} Q]}$, ונדרוש כי צד ימין יהיה פונקציה של

$t = x^2 + y^2$. זה התנאי המבוקש ! כאשר ניתן להשתמש ב -

$$\frac{\partial t}{\partial y} = 2y, \frac{\partial t}{\partial x} = 2x$$

7. פתרונות :

א. $\mu = \frac{1}{x^2} \Rightarrow y^2 + x \ln x = Cx$

ב. נשתמש באותו רעיון הוכחה כמו של השאלה הקודמת ונקבל :

$$\mu = (x + y)^2 \Rightarrow \boxed{(x + y)^3(x^2 + y^3) = C}$$

ג. נחפש גורם אינטגרציה שתלוי ב- $x^2 + y^2$.

על סמך שאלה 6 נקבל :

$$\mu = \frac{1}{x^2 + y^2} \Rightarrow \boxed{\arctan \frac{y}{x} = x^3 + C}$$

8. א. זוהי משוואת ריקטי עם פיתרון אחד שהוא $y = x$.

פיתרון המד"ר: $\boxed{x + (C - x)^{-1}}$

ב. משוואת ברנולי שפיתרונה: $\boxed{y = x^4(C + 0.5 \ln|x|)^2}$