מטריצה מייצגת לה"ל

9 באפריל 2016

תזכורות

- מטריצה מייצת $[T]_F^E$ מקיימת $[T]_F^E[v]_E=[Tv]_F$.
- מתקיים $[S\circ T]=[S][T]$ עם בסיסים מתאימים שצריך להוסיף..

מקרה פרטי של ה"ע היא העקת הזהות $I:V\to V$.
יהא V מ"ו ותהא $I:V\to V$ העתקת הזהות. יהיו EF שני בסיסים ל V אזי מתקיים לכל $v\in V$ כי

$$[I]_F^E[v]_E=[Iv]_F=[v]_F$$

מטריצה זאת נקראת מטריצת מעבר בין E ל F(היא לוקחת יצוג לפי בסיס E - $[v]_E$ ומחזריה את היצוג לפי F - $[v]_F$.
דוגמא $E=\{-1,2+x,3+x+x^2,x^3\},S=\left\{1,x,x^2,x^3\right\}$ בסיסים ל $\mathbb{R}_3[x]$ משבוע שעבר. מטריצת מעבר בניהם היא

$$[I]_S^E=\begin{pmatrix}-1&2&3&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

עוד שימוש: ראינו עבור ה"ל $T(a+bx+cx^2+dx^3)=\begin{pmatrix}b+c\\a\end{pmatrix}$ שני מטריצות מייצגות $[T]_{S'}^S,[T]_F^E$ מה הקשר בניהם?

$$[T]_F^E=[I]_F^{S'}[T]_{S'}^S[I]_S^E$$

ע"י שימוש במשפט $[S\circ T]=[S][T]$. עוד ראינו שאת $[T]_{S'}^S$ קל למצוא.. איך מוצאים את $[I]_F^{S'}$?
משפט: כל מטריצת מעבר הפיכה ומתקיים $\left([I]_F^E\right)^{-1}=[I]_E^F$
הוכחה: נוכיח באופן כללי עבור ה"ל הפיכה T- אכן

$$[T]_F^E[T^{-1}]_E^F=\left[T\circ T^{-1}\right]_F^F=[I]_F^F=I$$

בבפרט $\left([T]_F^E\right)^{-1}=[T^{-1}]_E^F$
דוגמא: $F=\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\}$ $S'=\{e_1,e_2\}$ בסיסים של $W=\mathbb{R}^2$ משבוע שעבר. אזי

$$[I]_F^{S'}=\left([I]_{S'}^F\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$$

אכן מתקיים כי

$$[T]_F^E=\left(\begin{array}{cccc}1&-1&-1&0\\-1&2&3&0\end{array}\right)=\underbrace{\left(\begin{array}{cc}1&-1\\0&1\end{array}\right)}_{[I]_F^{S'}}\underbrace{\left(\begin{array}{cccc}0&1&1&0\\1&0&0&0\end{array}\right)}_{[T]_{S'}^{S}}\underbrace{\left(\begin{array}{cccc}-1&2&3&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)}_{[I]_S^E}$$

הערות:

1. כדי לחשב מטריצת מעבר ניתן להשתמש בכך ש $[I]_F^E=[I]_F^S\,[I]_S^E=\left([I]_S^F\right)^{-1}[I]_S^E$ כאשר S בסיס סטנדרטי ולכן קל לחשב את המטריצות $[I]_S^F\,,[I]_S^E$
2. עבור ה"ל $T:V\to V$ ו E,F בסיסים מתקיים כי $[T]_E^E=[I]_E^F\,[T]_F^F\,[I]_F^E$ כלומר $[T]_E^E\,,[T]_F^F$ צמודות ($\left([I]_F^E\right)^{-1}=[I]_E^F$)
3. עבור $T:V\to V$ מתקיים כי $\left([T]_B^B\right)^n=[T^n]_B^B$ לכל n טבעי. אם T הפיכה זה נכון לכל n שלם (גם חזקות שליליות)

עוד שימושים: הפיכות גרעין ותמונה של ה"ל

תהא $T:V\to W$ עם בסיסים E,F בהתאמה. אזי

1. $[\ker T]_E=N\left([T]_F^E\right)$
2. $[ImT]_F=C\left([T]_F^E\right)$
3. T הפיכה אמ"מ $[T]_F^E$ הפיכה

דדוגמא: $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ ובסיסים $S=\left\{1,x,x^2\right\}$, $E=\left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\1\end{array}\right)\right\}$ עם מטריצה מייצגת

$$A=[T]_S^E=\left(\begin{array}{ccc}1&2&0\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right)$$

אזי

$$C(A)=\left\{\left(\begin{array}{c}a\\b\\0\end{array}\right)\,:\,a,b\in\mathbb{R}\right\}=span\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right)\}$$

ולכן

$$ImT==\{a+bx:\,a,b\in\mathbb{R}\}=span\{1,x\}$$

ו

$$[\ker T]_E=N(A)=N\left(\left(\begin{array}{ccc}1&0&-4\\0&1&2\\0&0&0\end{array}\right)\right)=\left\{\left(\begin{array}{c}4t\\-2t\\t\end{array}\right)\,:\,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\left(\begin{array}{c}4\\-2\\1\end{array}\right)\right\}$$

לכן

$$\ker T = span\left\{4\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \left\{4t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 2t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} : \ t \in \mathbb{R}\right\}$$

וכמובן שה"ל לא הפיכה כי המטריצה לא הפיכה כי הדטר' = 0