

פתרון תרגיל 9 אינפי 4

21 ביולי 2016

1. במקרה שלנו: $P = yz, Q = xz, R = xy$
לכן, נקבל:

$$\nabla \times F = (x - x, y - y, z - z) = (0, 0, 0)$$

ולכן לפי משפט סטוקס:

$$\int_C yz dx + xz dy + xy dz = \iint_S (0, 0, 0) \cdot \vec{n} dS = 0$$

2. במקרה שלנו, $P = z^2 - y^2, Q = x^2 - z^2, R = y^2 - x^2$
נחשב את הנורמל:

$$\vec{n} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (2y - (-2z), 2z - (-2x), 2x - (-2y)) = 2(y + z, z + x, x + y)$$

ולכן לפי משפט סטוקס האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int_C = \iint_S 2(y + z, z + x, x + y) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) dS = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x + y + z) dS$$

נזכור שאנחנו על המישור $x + y + z = 1$ ולכן:

$$\int_C = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S dS$$

האינטגרל שקיבלנו מחשב את שטחו של המשטח.
המשטח שלנו ניתן להטלה על מישור xy : $z = 1 - x - y$.
אלמנט השטח יהיה:

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{3}$$

ולכן:

$$\int_C = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S dS = \frac{4}{\sqrt{3}} \iint_D \sqrt{3} dx dy = 4 \iint_D dx dy$$

מהו תחום האינטגרציה D ?
נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ z = 5 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

כלומר: $x + y + 5 - x^2 - y^2 = 1$, לכן:

$$x^2 - x + y^2 - y = 4$$

ואחרי שנשלים לריבוע נקבל:

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{3}{\sqrt{2}})^2$$

כלומר תחום האינטגרציה D הוא מעגל שרדיוסו $\frac{3}{\sqrt{2}}$ (ומרכזו בנקודה $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$) ולכן שטחו הוא $\frac{9}{2}\pi$.
אם כן, האינטגרל שלנו יהיה:

$$\int_C = 4 \cdot \frac{9}{2}\pi = 18\pi$$

3. במקרה שלנו, $P = xy, Q = x^2, R = z^2$, הנורמל (המישור הוא $-y + z = 0$) יהיה:

$$\vec{n} = \frac{(0, -1, 1)}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$$

כמו כן:

$$\nabla \times F = (0 - 0, 0 - 0, 2x - x) = (0, 0, x)$$

ולכן לפי משפט סטוקס נקבל:

$$\int_C F d\vec{r} = \iint_S (0, 0, x) \cdot (0, -1, 1) \frac{1}{\sqrt{2}} dS = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S x dS$$

המשטח S ניתן להטלה על מישור xy , ע"י $z = x^2 + y^2$.
אלמנט השטח הוא:

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2} = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$$

ולכן:

$$\int_C = \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D x \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy =$$

מהו תחום האינטגרציה D ?
נפתור את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases} z = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

כלומר $x^2 + y^2 - y = 0$ נשלים לריבוע ונקבל:

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

כלומר התחום D הוא מעגל עם רדיוס $\frac{1}{2}$ ומרכז בנקודה $(0, \frac{1}{2})$.
נעבור לקואורדינטות קוטביות:

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

כאשר $0 \leq r \leq \frac{1}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$
היעקוביאן הוא r , ולכן:

$$\begin{aligned} \int_C &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} r \cos \theta \sqrt{1 + 4r^2 \cos^2 \theta + 4r^2 \sin^2 \theta} d\theta dr = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} r \sqrt{1 + 4r^2} \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \right) dr = 0 \end{aligned}$$

כלומר האינטגרל שווה ל-0.
4. נתבונן בשתי המיספירות, חצאי ספירה, למשל העליונה והתחתונה.
הן חולקות את אותם השוליים - מעגל ("מעגל גדול") אך בכיוונים מנוגדים.
נסמן את ההמיספירות ב- S_1, S_2 ונוכל לכתוב:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS = \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS + \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS =$$

לפי משפט סטוקס:

$$= \int_C F d\vec{r} + \int_{-C} F d\vec{r} = \int_C F d\vec{r} - \int_C F d\vec{r} = 0$$

כלומר האינטגרל שווה לאפס.