

תרגיל בית 5 מבוא לחוגים ומודולים 88-212 סמסטר ב' תשע"ז

הוראות זכרו למלא ולהגיש את הדו"ח.

שאלה 1 (מיקום לא רגולרי). יהי R חוג, ויהי $S \subseteq Z(R)$ תת-מונואיד כפלי של R . נסמן איברים של $S \times R$ תחת היחס $(s, r) \sim (s', r')$ אם קיים $t \in S$ כך ש- $trs' = tr's$. בדומה למה שעשינו בכיתה, נסמן מחלקת שקילות תחת היחס הזה ב- $\frac{r}{s}$ ואת אוסף כל מחלקות השקילות ב- $S^{-1}R$, ונגדיר על $S^{-1}R$ פעולות חיבור וכפל כצפוי.

א. הוכיחו כי \sim הוא אכן יחס שקילות. בנוסף, הראו שכאשר איברי S הם רגולריים, אז היחס הזה מתלכד עם היחס של מיקום שלמדנו בכיתה.

ב. הוכיחו $S^{-1}R = \{0\}$ אם ורק אם $0 \in S$ או ורק אם קיים ב- S איבר נילפוטנטי. (בסימון $\{0\}$ הכוונה לחוג האפס שהוא חוג בלי יחידה עם איבר אחד).

ג. תהי $\iota: R \rightarrow S^{-1}R$ המוגדרת לפי $\iota(r) = \frac{r}{1}$. הוכיחו כי ι ח"ע אם ורק אם כל איברי S הם רגולריים.

ד. הוכיחו שאם $S \subseteq R^\times$, אז ι על. מצאו תנאי מספיק שגם ההפך יהיה נכון.

ה. העשרה: קראו את המאמר "**חוגי שברים בדרך הקשה**" מאת חוזה פליפה ולוך ובדקו שזה למעשה יותר קל.

שאלה 2. יהי F שדה. הוכיחו שהחוג הבא הוא מקומי:

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{ccc|c} a & b & c & \\ 0 & a & d & \\ 0 & 0 & a & \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in F \right\}$$

שאלה 3. יהי R חוג. נסמן ב- $\text{Spec}(R)$ את אוסף האידיאלים הראשוניים שלו. לכל תת-קבוצה $S \subseteq R$ נגדיר

$$V(S) = \{P \in \text{Spec}(R) \mid S \subseteq P\}$$

א. הוכיחו שאם $I, J \triangleleft R$ אידיאלים, אז $V(I) \cup V(J) = V(IJ)$.

ב. הוכיחו שאם $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ אוסף של אידיאלים, אז $\bigcap_{\alpha} V(I_\alpha) = V(\sum_{\alpha} I_\alpha)$.

ג. רשות למי שמכיר: הוכיחו שבסעיפים הקודמים הגדרנו טופולוגיה על $\text{Spec}(R)$.

שאלה 4. יהי $d \in \mathbb{N}$ חופשי מריבועים. הוכיחו ששדה השברים של $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ הוא $\mathbb{Q}[\sqrt{d}]$.

שאלה 5. לכל $n \in \mathbb{N}$ נסמן $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}] = S^{-1}\mathbb{Z}$ כאשר $S = \{n^k \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ בדומה למה שעשינו בכיתה. יהי p מספר ראשוני.

א. מצאו את האידיאלים של $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$.

ב. הוכיחו שלא קיים חוג $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right] \subsetneq R \subsetneq \mathbb{Z}$ המוכל ממש בין החוגים.

ג. הוכיחו שאם $m|n$, אז $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{m}\right] \subseteq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$. הוכיחו שאם $n \nmid m^k$ לכל $k \in \mathbb{N}$, אז זו הכלה ממש.

ד. מצאו סדרת מספרים n_1, n_2, n_3, \dots כך שבשרשרת החוגים

$$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_1}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_2}\right] \subsetneq \mathbb{Z}\left[\frac{1}{n_3}\right] \subsetneq \dots \subsetneq \mathbb{Q}$$

יש הכלה ממש.

שאלה 6. יהי R חוג חילופי. הוכיחו שחוג פולינומים ביותר ממשתנה אחד מעל R אינו חוג ראשי. רמז: גרסה קלה יותר תבקש להוכיח שהאידיאל $\langle x, y \rangle$ אינו ראשי בחוג $\mathbb{Q}[x, y]$.

בהצלחה!