פתרון תרגיל בית מספר 5

שאלה 1

1. נראה הכלה דו כיוונית. יהי $y \in \bigcup p\mathbb{Z}$, אזי y הוא כפולה שלמה של ראשוני ובפרט $y \notin \{1,-1\}$. בכיוון ההפוך: יהי $m \in \mathbb{Z} - \{1,-1\}$ אם m ראשוני אזי $m = m \cdot 1 \in m\mathbb{Z} \subseteq \bigcup p\mathbb{Z}$. אם m פריק אזי קיים ראשוני q המחלק את m ולכן $m \in q\mathbb{Z} \subseteq \bigcup p\mathbb{Z}$.

2. נראה ש $\{1,-1\}$ אינה פתוחה ולכן $\mathbb{Z} - \{1,-1\}$ אינה סגורה. אמנם, $\{1,-1\}$ סופית ולכן לא יכולה להכיל סדרה חשבונית דו צדדית שהיא אינסופית.

3. נניח בשלילה כי מס' הראשוניים הוא סופי. הראינו שכל סדרה חשבונית דו צדדית היא סגורה וכמו כן איחוד סופי של קב' סגורות היא סגורה ומכאן $\bigcup p\mathbb{Z}$ סגורה. עפ"י סעיף (1) נקבל ש- $\mathbb{Z} - \{1,-1\}$ סגורה בסתירה לסעיף (2).

שאלה 2

א. קבוצה ריקה: מתקבלת כאיחוד ריק.

המרחב כולו: מתקבל כאיחוד של $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n)$.

סגירות ביחס לחיתוך סופי: מספיק להתבונן בשתי קבוצות מהצורה $[a,b), [c,d)$ (מדוע?). יתכנו שתי אפשרויות: אם החיתוך ריק, הטענה מתקיימת. אחרת, $[a,b) \cap [c,d) = [e,f)$ כאשר $e = \max\{a,c\}, \quad f = \min\{b,d\}$.

סגירות ביחס לאיחוד: טריוויאלי.

ב. ברור ש ${}^2 \not\subset T$ כי למשל $[2,3) \in T \setminus {}^2$. נראה ש $T \subseteq {}^2$ וזה יוכיח בסה"כ ש- $T \subset {}^2$. תהי $O \in {}^2$ אזי לכל $x \in O$ קיים $\pounds_x > 0$ (יש תלות ב x) כך ש $B(x, \pounds_x) \subseteq O$. מתקיים $O \subseteq \bigcup_{x \in O} B(x, \pounds_x) \subseteq \bigcup_{x \in O} [x, x + \pounds_x) \subseteq O$, לכן $O = \bigcup_{x \in O} [x, x + \pounds_x)$ ומכאן $O \in T$.

ג. נוכיח שהסדרה $\frac{1}{n}$ מתכנסת ל 0 במ"ט זה. תהי U סביבה של 0 אזי U היא איחוד של קטעים מהצורה $[a,b)$ לכן קיים קטע $[a,b)$ כך ש $0 \in [a,b) \subseteq U$.

$a \le 0 < b$ ולכן גם מתקיים $0 \in [0,b) \subseteq [a,b) \subseteq U$. $0 < b$ ולכן קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך ש $b > \frac{1}{n_0}$. מתקיים לכל $n \ge n_0$ $b > \frac{1}{n_0} \ge \frac{1}{n} > 0$. מכאן לכל $n \ge n_0$

$\frac{1}{n} \in (0,b) \subseteq [0,b) \subseteq [a,b) \subseteq U$.

הערה: מכלתחילה היה ברור שאם $\frac{1}{n} \xrightarrow{T} x$ אז $x=0$ שכן $^{2} \subset T$ ועפ"י טענה שהוכחנו בכיתה במצב זה אם $\frac{1}{n} \xrightarrow{T} x$ אז גם $\frac{1}{n} \xrightarrow{2} x$ אבל אנו יודעים ש $\frac{1}{n} \xrightarrow{2} x$ אם ורק אם $x=0$ (מדוע?).

שאלה 3

יהיה X מ"ט. $A \subseteq X$ תת מרחב, אזי $S \subseteq A$ סגורה ב- A $\Leftrightarrow$ קיימת $Q \subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S = Q \bigcap A$.

$\Rightarrow$ קיימת $Q \subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S = Q \bigcap A$, צריך להוכיח שְ- S סגורה בְּ- A. נשים לב שמתקיים: $A \setminus S = A \setminus (Q \bigcap A) = A \bigcap (X \setminus Q)$. $(X \setminus Q)$ הינה קבוצה פתוחה ב- X ולכן לפי הגדרת תת מרחב טופולוגי $A \bigcap (X \setminus Q)$ פתוחה ב- A. מכאן נובע שְ- $A \setminus S$ פתוחה ב- A ולכן S סגורה ב- A.

$\Leftarrow$ נתון כי $S \subseteq A$ סגורה ב- A, נבנה $Q \subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S = Q \bigcap A$.

היות וְ- S סגורה, המשלים שלה בְּ- A פתוח, ולכן קיימת $V \subseteq X$ פתוחה ב- X כך שְ- $A \setminus S = V \bigcap A$. מכאן, $A \setminus (A \setminus S) = A \setminus (V \bigcap A)$ $\Leftarrow$ $S = A \setminus V$. מצד שני, נשים לב כי $A \setminus V = A \bigcap (X \setminus V)$. לכן, בסה"כ, $S = A \bigcap (X \setminus V)$. נבחר $Q = X \setminus V$ ונקבל את הדרוש.

<u>שאלה 4</u>

התשובה תלויה בעוצמה של המרחב. שימו לב שכל הטיעונים והנימוקים מקבילים לאלה של הטיעונים בטופולוגיה הקו-מנייה. אם $|X|<\infty$ אזי הטופולוגיה הקו-סופית היא בדיוק הטופולוגיה הדיסקרטית, המושרית מהמטריקה הדיסקרטית. לכן התשובה היא כן: המרחב מטריזבילי.

אם $|X|=\infty$ אזי המרחב אינו מטריזבילי, שכן הוא אינו האוסדורף (ראו את תחילת הקובץ של התרגיל).

<u>שאלה 5</u>

א. תהי $f:\left(X,^{2}_{disc}\right)\rightarrow\left(Y,^{2}\right)$ פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי למרחב טופולוגי כלשהו. במ"ט דיסקרטי כל קבוצה היא פתוחה, ולכן $\forall U\subseteq Y$ פתוחה, גם $f^{-1}\left(U\right)\subseteq X$ פתוחה. ומהגדרת הרציפות נובע כי f רציפה.

ב. תהי $f:\left(X,^{2}\right)\rightarrow\left(Y,^{2}_{trivial}\right)$. נוכיח שהיא רציפה. כזכור, בטופולוגיה הטריוויאלית יש רק שתי קבוצות פתוחות: הקבוצה הריקה והמרחב עצמו. לכן עלינו לבדוק רק שתי תמונות הפוכות.
$f^{-1}\left(Y\right)=X$, $f^{-1}\left(\varnothing\right)=\varnothing$ ואלה הן שתי קבוצות פתוחות במרחב המקור. לכן (לפי ההגדרה) f רציפה.

ג. $f:\left(X,^{2}_{1}\right)\rightarrow\left(Y,^{2}_{2}\right)$ רציפה. לכן לכל $U\in{}^{2}_{2}$ מתקיים $f^{-1}\left(U\right)\in{}^{2}_{1}$. אבל, ${}^{2}_{3}\subseteq{}^{2}_{2}$, ולכן לכל $U\in{}^{2}_{3}$ מתקיים $f^{-1}\left(U\right)\in{}^{2}_{1}$. מהגדרת הרציפות נובע ש- $f:\left(X,^{2}_{1}\right)\rightarrow\left(Y,^{2}_{3}\right)$ רציפה.
כמו כן, אם $f:\left(X,^{2}_{1}\right)\rightarrow\left(Y,^{2}_{2}\right)$ רציפה, לכל $U\in{}^{2}_{2}$ מתקיים $f^{-1}\left(U\right)\in{}^{2}_{4}$, היות ו- ${}^{2}_{1}\subseteq{}^{2}_{4}$. לכן $f:\left(X,^{2}_{4}\right)\rightarrow\left(Y,^{2}_{2}\right)$ רציפה גם כן.

<u>בונוס</u>

א $\Leftarrow$ב: $\{Y\}$ כיסוי פתוח של Y ו $Z\cap Y=Z$ סגורה ב Y.

ב $\Leftarrow$א: נראה ש $Y\setminus Z$ פתוחה ב Y ומכאן נסיק ש Z סגורה ב Y. לכל $i\in I$ $Z\cap U_i$ סגורה ב U_i עפ"י הנתון ומכאן $\left(Y\setminus Z\right)\cap U_i$ פתוחה ב U_i לכל $i\in I$. כעת, מכיון ש U_i פתוחה ב Y לכל $i\in I$, ניתן להסיק מהנ"ל ש $\left(Y\setminus Z\right)\cap U_i$ פתוחה ב Y לכל $i\in I$.

איחוד כלשהו של פתוחות הוא קבוצה פתוחה ולכן $\bigcup_{i\in I}\left(\left(Y\setminus Z\right)\cap U_i\right)=\left(Y\setminus Z\right)\cap\bigcup_{i\in I}U_i$ פתוחה ב Y.

מכיון ש $\left\{U_i\right\}_{i\in I}$ כיסוי של Y נקבל ש: $\left(Y\setminus Z\right)\cap\bigcup_{i\in I}U_i=\left(Y\setminus Z\right)\cap Y=Y\setminus Z$. מכאן $Y\setminus Z$ פתוחה ב Y כדרוש.