תרגול 3 – אינפי 1

תרגיל

תהיינה $S,T\neq\varnothing$ קבוצות חסומות. אזי $\sup(S+T)=\sup S+\sup T$.

פתרון

נוכיח שני אי-שוויונים:

$\le$: לכל $s\in S$ מתקיים $s\le\sup S$ וגם לכל $t\in T$ מתקיים $t\le\sup T$. לכן, $s+t\le\sup S+\sup T$ ולכן $\sup(S+T)\le\sup S+\sup T$.

$\ge$: על פי הטענה מספיק להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים:
$\sup(S+T)+\varepsilon>\sup S+\sup T$. זה שקול ל- $\sup(S+T)>\left(\sup S-\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\sup T-\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

$\sup S-\frac{\varepsilon}{2}$ אינו חסם מלעיל של S ולכן קיים $s_0\in S$ עבורו $\sup S-\frac{\varepsilon}{2}<s_0$. באופן דומה קיים $t_0\in T$ עבורו $\sup T-\frac{\varepsilon}{2}<t_0$. מאידך, ברור ש- $\sup(S+T)\ge s_0+t_0$, וזה מוכיח את הדרוש.

מש"ל

תרגיל

תהי $A=\left\{\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n\ :\ n\in\mathbb{N}\right\}$. מצאו מינימום, מקסימום, חסם עליון וחסם תחתון (במידה וקיימים).

פתרון

ראשית, נתבונן במספר איברי הקבוצה על מנת לקבל הערכה כלשהי:
$A=\left\{-1,2\frac{1}{4},-1\frac{8}{9},2\frac{1}{16},\ldots\right\}$. אנו מעריכים ש- $2\frac{1}{4}$ הוא חסם מלעיל ששייך לקבוצה (ולכן הוא גם סופרמום וגם מקסימום). כמו כן, אנו מעריכים ש- (-2) הוא חסם תחתון שאינו שייך לקבוצה (ולכן אין לקבוצה מינימום).

א. נוכיח ש- $2\frac{1}{4}$ הוא חסם מלעיל. צריך להוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n\le 2+\frac{1}{4}$. עבור $n=1$ הטענה ברורה. עבור $n\ge2$ מתקיים:
$\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n\le\frac{1}{n^2}+2\le 2+\frac{1}{4}$, שכן עבור $n\ge2$ מתקיים $\frac{1}{n^2}\le\frac{1}{4}$.

ב. כעת נוכיח ש- (-2) הינו חסם מלרע. צריך להוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n>-2$. ואכן, $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n\geq\frac{1}{n^2}-2>-2$.

ג. נוכיח ש- (-2) חסם תחתון. צריך להוכיח שלכל $\varepsilon>0$ קיים $a\in A$ כך ש- $a<-2+\varepsilon$. יהי $\varepsilon>0$. נמצא $n\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n<-2+\varepsilon$. יהי $n_0\in\mathbb{N}$ אי זוגי עבורו מתקיים $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$. עבורו יתקיים גם $\frac{1}{n_0^{\ 2}}-2<-2+\varepsilon$, כדרוש.

ד. נותר להראות שלא קיים מינימום, כלומר: $(-2)\notin A$. ואכן, לא קיים $n\in\mathbb{N}$ עבורו $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n=-2$ שכן הראינו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $\frac{1}{n^2}+2\cdot(-1)^n>-2$

מש"ל

<u>משפט</u>(שתראו או ראיתם בהרצאה)

לכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלעיל $A\subseteq\mathbb{R}$ יש חסם עליון.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שלכל קבוצה לא ריקה וחסומה מלרע $A\subseteq\mathbb{R}$ יש חסם תחתון.

<u>פתרון</u>

תהי $\varnothing\neq A\subseteq\mathbb{R}$ חסומה מלרע. נראה שהקבוצה $B=-A=\{-a:a\in A\}$ חסומה מלעיל ומתקיים $\inf(A)=-\sup B$. יהי $m\in\mathbb{R}$ חסם מלרע של A. אזי $\forall a\in A\ \ m\leq a$. לכן $\forall a\in A\ \ -m\geq -a$. לכן $(-m)$ הוא חסם מלעיל של B. לפי המשפט קיים $\sup B$. נוכיח $\inf(A)=-\sup B$. לשם כך נראה תחילה ש- $-\sup B=T$ הינו חסם מלרע של A.

$(-T)$ הינו חסם עליון של B ולכן $\forall a\in A\ \ -T\geq -a$ ולכן $\forall a\in A\ \ T\leq a$ ולכן T חסם מלרע של A. כעת נוכיח שזהו חסם מלרע המקסימלי. נניח בשלילה שקיים $\varepsilon>0$ כך ש- $T+\varepsilon$ הוא חסם מלרע של A. כלומר, $\forall a\in A\ \ T+\varepsilon\leq a$. לכן
$\forall a\in A\ \ \sup B-\varepsilon=-T-\varepsilon\geq -a$ וזאת סתירה להגדרת סופרמום (שכן $\sup B-\varepsilon<\sup B$).

מש"ל

<u>תרגיל</u>

מצאו חסם עליון ותחתון של הקבוצה $A=\left\{\frac{m}{2^n}:m,n\in\mathbb{N}\right\}$.

<u>פתרון</u>

הקבוצה אינה חסומה מלעיל. נוכיח זאת. יהי $T\in\mathbb{R}$, עבור $n=1$ ברור שקיים $m\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{m}{2}>T$, מכיוון שקבוצת הטבעיים אינה חסומה מלעיל ולכן $2T$ אינו החסם שלה.

הקבוצה חסומה מלרע על ידי אפס. נראה שזהו החסם התחתון. יהי $\varepsilon>0$. צריך למצוא $n_0,m_0\in\mathbb{N}$ כך ש- $\frac{m_0}{2^{n_0}}<\varepsilon$. נבחר $m_0=1$. קיים n_0 שמקיים $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ ובפרט $\frac{1}{2^{n_0}}<\frac{1}{n_0}<\varepsilon$.

מש"ל

סדרות

<u>הגדרה – גבול של סדרה</u>

גבול של סדרה הוא נקודה ממשית אליה איברי הסדרה מתקרבים. לסדרה שאינה מתקרבת לנקודה ספציפית – אין גבול.

הגדרה פורמלית:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של מספרים ממשיים. מספר $L\in\mathbb{R}$ נקרא "גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$" אם לכל $0<\varepsilon\in\mathbb{R}$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n\geq n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.
במקרה זה מסמנים $\lim_{n\to\infty}a_n=L$.

(לצייר ציור שמסביר את התפקידים של המשתנים השונים בהגדרה.)

<u>תרגיל</u>

הוכיחו לפי ההגדרה שהסדרה $a_n=\frac{1-(-1)^n}{2n}$ מתכנסת לאפס.

<u>פתרון</u>

הסדרה היא $1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\frac{1}{7},0,...$. יהי $\varepsilon > 0$. $|a_n - 0| = \begin{cases} 0 & n \ is \ even \\ \frac{1}{n} & n \ is \ odd \end{cases}$. אנחנו מחפשים $n_0 \in \mathbb{N}$ עבורו לכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$. כאשר n זוגי ברור שמתקיים $|a_n - 0| < \varepsilon$ ללא תלות ב-n_0, לכן נותר "לטפל" רק באי זוגיים. כלומר, מחפשים מתי $\frac{1}{n} < \varepsilon$. זה מתקיים כאשר $n > \frac{1}{\varepsilon}$. לכן, אם $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ (וקיים כזה) אזי לכל $n \geq n_0$ נקבל הדרוש.

הוכחה פורמלית: יהי $\varepsilon > 0$. ניקח $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. לכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - 0| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

הוכיחו על פי ההגדרה שהסדרה $a_n = \frac{n^2+n-1}{n^2+1}$ מתכנסת ל-1.

<u>פתרון</u>

יהי $\varepsilon > 0$. $\left|\frac{n^2+n-1}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n-2}{n^2+1}\right| < \left|\frac{n-2}{n^2}\right| \underset{n>2}{=} \frac{n-2}{n^2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} < \varepsilon$. כל שנותר הוא לבחור $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

מש"ל

<u>שלילת הגדרת הגבול</u>

$L \in \mathbb{R}$ אינו גבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם <u>קיים</u> $\varepsilon > 0$ כך של<u>כל</u> $n \in \mathbb{N}$ קיים $n_0 \geq n$ עבורו $|a_{n_0} - L| \geq \varepsilon$.

<u>תרגיל</u>

הוכיחו שהסדרה $a_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$ אינה מתכנסת לאפס. לאחר מכן הוכיחו שהיא לא מתכנסת לשום גבול $L \in \mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

נוכיח תחילה שהסדרה לא מתכנסת לאפס. $|a_n - 0| = \left|\frac{1+(-1)^n}{2}\right| \underset{n\ is\ even}{=} 1$. לכן עבור $\varepsilon = 1$ נקבל שלכל n קיים $n_0 \geq n$ זוגי כך ש- $|a_{n_0} - 0| \geq \varepsilon$.

יהי $0 \neq L \in \mathbb{R}$ ונראה שהוא אינו הגבול של הסדרה. $|a_n - L| = \left|\frac{1+(-1)^n}{2} - L\right| \underset{n\ is\ odd}{=} |L|$.

לכן עבור $\varepsilon = |L| > 0$ נקבל הדרוש.

מש"ל

<u>תרגיל</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ויהי $L \in \mathbb{R}$. האם התנאי הבא שקול לכך שהסדרה מתכנסת ל- L? הוכיחו שקילות (גרירה כפולה) או הפריכו (באמצעות דוגמא נגדית).

"לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < 100\varepsilon$." (*)

<u>פתרון</u>

כן, זהו תנאי שקול. נוכיח את שתי הגרירות.

הגדרת הגבול גוררת (*): מתקיים לפי הגדרת הגבול לכל $\varepsilon > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$. אבל $\varepsilon < 100\varepsilon$.

(*) גורר את הגדרת הגבול: יהי $\varepsilon > 0$ (בשביל הוכחת הגדרת הגבול). נתון לכל $\varepsilon' > 0$ קיים n_0 כך שלכל $n \geq n_0$ מתקיים $|a_n - L| < 100\varepsilon'$. בפרט זה מתקיים עבור $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{100}$ ומקבלים הדרוש.

מש"ל