תרגול 13-אושרית

תרגול חזרה

נכון או לא נכון:

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי הפונקציה $\|v\| = \frac{\langle v,v \rangle}{2}$ הינה נורמה.

נכון או לא נכון:

יהי V מרחב מכפלה פנימית, אזי הפונקציה $\|v\| = \frac{\langle v,v\rangle}{2}$ הינה נורמה.

תזכורת: הגדרת נורמה

הגדרה: יהי V מ"פ.

"הנורמה" של V היא פונק' $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$

שמקיימת:

1. $\|v\| \geq 0$ לכל $v \in V$ — **אי שליליות**

   $\|v\| = 0 \iff v = 0$

2. $\|av\| = |a| \cdot \|v\|$ — **הומוגניות**

3. א-שוויון המשולש - $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

פתרון:

לא נכון

נראה כי לא מתקיימת תכונת ההומוגניות של נורמה.

נגדיר - $V=\mathbb{R}^2$ עם מ"פ סטנדרטית

נבחר את הוקטור $\binom{1}{1}\in\mathbb{R}^2$ ואת הסקלר 3. ונראה כי $\|3\cdot\binom{1}{1}\| \neq |3|\cdot\|\binom{1}{1}\|$

<u>אגף שמאל:</u>

$$\|3\cdot\binom{1}{1}\| = \|\binom{3}{3}\| = \frac{\langle\binom{3}{3},\binom{3}{3}\rangle}{2} = \frac{9+9}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$\neq$$

<u>אגף ימין:</u>

$$|3|\cdot\|\binom{1}{1}\| = |3|\cdot\frac{\langle\binom{1}{1},\binom{1}{1}\rangle}{2} = 3\cdot\frac{2}{2} = 3$$

ולכן לא מתקיימת ההומוגניות $\Leftarrow$ לא נורמה.

נכון או לא נכון:

אם מטריצה A^2 לכסינה, אזי A לכסינה גם היא.

פתרון:

. לא נכון. למשל

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

אינה לכסינה (הפ"א לא מתפרק לגורמים ליניארים) ואילו

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

כן לכסינה (היא אלכסונית!)

שאלה ממבחן 2019:

<u>שאלה 1</u> (15 נק') יהא $V=\mathbb{R}^5$ עם מכפלה פנימית הסטנדרטית. נגדיר $W=Span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}\subseteq V$ תת מרחב.

מצאו את ההיטל $\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$ $\boxed{proj_W}$ על W.

הכל

הגדרה:

יהי V ממ"פ , $W \subseteq V$ ת"מ ו־ $v \in V$.

ההיטל של v על W הוא $w \in W$ המקיים $v - w \in W^{\perp}$.

אם $\{w_1, ..., w_k\}$ בסיס אורתוגונלי ל־ W אז $w = \sum_{i=1}^{k} \frac{<v,w_i>}{<w_i,w_i>} w_i$.

פתרון: ראשית נראה כי $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ הוא בסיס של W.

דבר זה נובע מהגדרת W כי W מוגדר כ- $sp(B)$ ובנוסף קל לראות כי הוקטורים ב-B בת"ל
ולכן B בסיס של W לפי הגדרה ומשפט.

כדי למצוא את ההיטל אנחנו צריכים שיהיה לנו בסיס אורתוגונלי:
הבסיס B שנתון לנו הוא לא אורתוגונלי ולכן נהפוך אותו לבסיס כזה ע"י שימוש באלגוריתם גרם שמידט.

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{<v_2, w_1>}{<w_1, w_1>} \cdot w_1$$

נחשב כל 1 מהאיברים בנפרד-

$$<v_2, w_1> = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 3$$

$$<w_1, w_1> = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 3$$

נציב ונקבל-

$$w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

לכן- $\hat{B} = \left\{ \overset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ הבסיס האורתוגונלי.

לכן - הבסיס האורתוגונלי $\hat{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

עכשיו - נחשב

$$\Pi_W \Bigg(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{u_1} \Bigg) = \frac{< u_1, w_1 >}{< w_1, w_1 >} \cdot w_1 + \frac{< u_1, w_2 >}{< w_2, w_2 >} \cdot w_2$$

$$< u_1, w_1 > = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} > = 1+1+1 = 3 \qquad < u_1, w_2 > = < \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = 1$$

$$< w_2, w_2 > = < \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} > = 2$$

נציב ונקבל -

$$\Pi_W(u_1) = \frac{3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.5 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}}_{\text{אשל}}$$

הגדרה:

יהי V ממ"פ , $W \subseteq V$ ת"מ ו- $v \in V$.

ההיטל של v על W הוא $w \in W$ המקיים $v - w \in W^{\perp}$.

אם $\{w_1, \ldots, w_k\}$ בסיס אורתוגונלי ל- W אז $w = \sum_{i=1}^{k} \frac{<v, w_i>}{<w_i, w_i>} w_i$.

שאלה ממבחן 2016:

יהי $V = R_2[x]$ מרחב הפולינומים מעל R ממעלה 2 לכל היותר. תהי $T: V \to V$ העתקה המוגדרת ע"י הנוסחא $T(f) = f'' - 2f'$ (f', f'' הן הנגזרת הראשונה והשנייה של פולינום f).

א. הראו כי T היא העתקה לינארית וחשבו $\dim(Im(T))$, $\dim\left(Ker(T)\right)$. (5 נק')

ב. האם T לכסינה? (10 נק')

ג. חשבו את הפולינום המינימלי $m_T(x)$. (10 נק')

פתרון:

(א) נראה כי T ה"ל: לכל $f,g\in V$ ולכל $\alpha\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$T(\alpha f+g)=[\alpha f+g]''+2[\alpha f+g]'=\alpha f''+g''+2(\alpha f'+g')=\alpha(f''+2f')+g''+2g'=\alpha T(f)+T(g)$$

וסיימנו. נחשב מטריצה מייצגת ל T לפי הבסיס הסטנדרטי $S=\{1,x,x^2\}$:

$$[T]_S^S=\left([T(1)]_S,[T(x)]_S,[T(x^2)]_S\right)=\begin{pmatrix}0&-2&2\\0&0&-4\\0&0&0\end{pmatrix}$$

המטריצה מדורגת ורואים כי $\dim Im(T)=rank(T)=rank([T]_S^S)=2$.
כעת, משפט הדרגה אומר כי

$$3=\dim V=\dim\ker T+\dim ImT$$

ולכן $\dim\ker T=3-2=1$.

במטריצה מייצגת מימד התמונה = דרגת המטריצה
מימד הגרעין= מימד מרחב האפס של המטריצה

(ב) הפ"א של T הוא

$$P_T(\lambda) = \left|\lambda I - [T]_S^S\right| = \left|\begin{pmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 0 & \lambda & 4 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}\right| = \lambda^3$$

ולכן $m_T(\lambda) = \lambda^i$ עבור $i \in \{1,2,3\}$. נבדוק

i. עבור $i = 1$ נקבל כי $[T]_S^S \neq 0$ ולכן אפשרות זאת נפסלת

ii. עבור $i = 2$ נקבל כי $\left([T]_S^S\right)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$ ולכן אפשרות זאת נפסלת

iii. נשארו עם אפשרות $i = 3$ שאכן מתקיים (גם לפי משפט קיילי המילטון) כי $\left([T]_S^S\right)^3 = 0$

כיוון ש $m_T(\lambda)$ אינו מתפרק לגורמים לינארים שונים ממעלה 1 נקבל כי T אינה לכסינה

(ג) הפ"מ $m_T(\lambda)$ חושב בסעיף הקודם והוא שווה ל λ^3

לפי הגדרת פ"מ כפולינום מדרגה נמוכה ביותר שמאפס
את המטריצה A

שאלה:

יהא V מ"ו ממימד סופי. תהא $T:V\to V$ אופרטור לינארי. ~~יהא~~

הוכיחו/הפריכו:

א. אם $\lambda=0$ הוא הע"ע היחיד של T ו-$T\neq 0$ אזי T אינה לכסינה.

שאלה מבחן 2018:

יהא V מ"ו ממימד סופי. תהא $T:V\to V$ אופרטור לינארי.

הוכיחו/הפריכו:

א. אם $\lambda=0$ הוא הע"ע היחיד של T ו-$T\neq 0$ אזי T - אינה לכסינה. $\boxed{\text{נכון}}$

הוכחה: נניח ש-T לכסינה, לכן קיים בסיס B כך ש- $[T]_B^B$ היא מטריצה אלכסונית.

נתון כי הע"ע היחיד של T הוא 0 לכן הצורה האלכסונית של T שמכילה את הע"ע על האלכסון היא

$[T]_B^B = \underbrace{0}_{\text{מטריצת האפס}}$ בסתירה לנתון ש-T היא לא העתקת האפס.

מש"ל

שאלה:

יהא V מ"ו ממימד סופי. תהא- $T:V\to V$ אופרטור לינארי.

הוכיחו/הפריכו:

א. אם קיים $m>1$ טבעי כך ש- $T^m=0$ ו- T לכסינה אזי $T=0$

ב. אם קיים $m>1$ טבעי כך ש- $T^m=0$ ו- T לכסינה אזי $T=0$ - $\boxed{\text{נכון}}$

הוכחה: T לכסינה ולכן קיים בסיס B של V כך ש- $[T]_B^B$ אלכסונית

נסמן:
$$[T]_B^B=\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$$

↓ לפי הרכבת מטריצה אלכסונית

$$\left([T]_B^B\right)^m=\begin{pmatrix} a_1^m & & \\ & \ddots & \\ & & a_n^m \end{pmatrix}$$

|| ← לפי הג' הרכבת העתקה

$$[T^m]_B^B=0$$

↓

ונתון - קיים m מקיים לדרוש.

$$\Leftarrow a_1^m=\dots=a_n^m=0 \Leftarrow a_1=\dots=a_n=0 \Leftarrow [T]_B^B=0 \Leftarrow T$$ העתקת האפס.

מש"ל

שאלה:

(1) **שאלה - הוכח/הפרך:**

יהי T אופרטור צמ"ע אזי - $T+i\cdot I$ אופרטור הפיך.

1 **שאלה - הוכח/הפרך:**

יהי T אופרטור צמ"ע אזי - $T+i\cdot I$ אופרטור הפיך. נכון

הוכחה: T צמ"ע נתון $\Leftarrow$ כל הע"ע של T הם ממשיים.

נניח כי - $T+i\cdot I$ לא הפיך.

$|T+iI|=0$ כלומר דטרמיננטה של מטריצה לא הפיכה היא 0

$\in$ $-i$ הוא ע"ע של T. לפי הג' של ע"ע כפתרון השורש של פ"א

סתירה לכך שכל הע"ע של T ממשיים. מש"ל

שאלה:

ב) שאלה - מבחני הפרק: אם U_1, U_2 אופרטורים אוניטריים אז-גם U_1+U_2 אופרטור אוניטרי

ב) **שאלה - הוכח/הפרך:** אם U_1, U_2 אופרטורים אוניטריים אז-גם U_1+U_2 אופרטור אוניטרי.

פתרון: לא נכון

דוגמה נגדית: נבחר את U_1 להיות אופרטור כך שהמטריצה המייצגת שלו ביחס לבסיס אורתונורמלי B היא -

$$[U_1]_B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

כיוון שמדובר בבסיס אורתונורמלי U_1 אוניטרי $\iff$ $[U_1]_B$ אוניטרי

$[U_1]_B$ אוניטרי כי העמודות שלו- הן בסיס אורתונורמלי ביחס למ"פ סטנדרטית של $\mathbb{R}^2$.

נבחר את U_2 להיות $U_2=U_1$ ולכן- U_2 אוניטרי.

נקבל ש- $[U_1+U_2]_B = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}$

לא אוניטרי כי עמודותיה לא בסיס אורתונורמלי $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ לא מנורמה 1.

<u>מש"ל</u>

בהצלחה!!!