תרגיל 1 – אלגברה מופשטת 1

1. מצא a ו b המקיימים $\gcd(r,s)=ar+bs$, כאשר
   ב. $r=11, s=17$.
   ג. $r=8, s=12$.
2. יהיו $a,b,c\in\mathbb{Z}$ כך ש $a|bc$ ו $\gcd(a,b)=1$ הוכח ש $a|c$.
3. א. הוכח ש $\Omega_\infty=\{w\in\mathbb{C}\mid w^m=1$ כך ש $m\in\mathbb{Z}$ קיים $\}$ חבורה אבלית ביחס לפעולת הכפל של מספרים מרוכבים.
   ב. הוכח ש $\Omega=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|=1\}$ חבורה אבלית ביחס לפעולת הכפל של מספרים מרוכבים.
4. תהיי G חבורה הוכח את הטענות הבאות:
   ב. אם לכל $a\in G$ מתקיים $a^2=e$ אז G אבלית.
   ג. אם לכל $a,b\in G$ מתקיים $(ab)^2=a^2b^2$ אזי G חבורה אבלית.
5. א. הוכח שהקבוצה $\mathbb{R}^3$ עם הפעולה הבאה:
   $(x_1,y_1,z_1)\cdot(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2+z_1y_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$ חבורה לא קומוטטיבית.
   ב. את האיבר ההופכי ל $(30,7,2012)$.
6. כמה מבנים אלגבריים בינריים קיימים מעל קבוצה עם 5 איברים כך שהפעולה היא:
   א. קומוטטיבית.
   ב. קומוטטיבית ובעלת איבר ניטרלי.
7. נביט בקבוצה $(\mathbb{N}\cup\{0\})\times(\mathbb{N}\cup\{0\})$ ונגדיר פעולה $*$ על הקבוצה המקיימת:
   $$(a,b)*(c,d)=\begin{cases}(a+c-b,d) & c>b\\ (a,b-c+d) & otherwise\end{cases}.$$
   א. הראו כי הקבוצה יחד עם הפעולה הנ"ל מהווה מונואיד.
   ב. מהי קבוצת האיברים ההפיכים משמאל? האם היא חבורה?
8. תהיינה H_1,H_2 תת חבורות של G. הוכח כי $H_1\cup H_2$ תת חבורה של G אם ורק אם $H_1\subseteq H_2$ או $H_2\subseteq H_1$.
9. רשמו את כל האיברים שבחבורה U_{10} רשמו את טבלת הכפל שלה ומצאו את כל תתי החבורות שלה.
10. תהיי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ מטריצה כך ש $n>1$ נגדיר $V_A=\{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid AB=BA\}$ האם V_A אגודה, מונואיד, חבורה או חבורה אבלית. הוכח את תשובתך.
11. הוכח כי בחבורה G מסדר סופי כל $e\neq a\in G$ הוא מסדר סופי.
12. הוכח שהחבורה U_8 לא ציקלית והחבורה U_9 ציקלית.

<u>תרגיל בונוס</u>

הוכח שיש אינסוף ראשוניים מהצורה $6n-1$. הדרכה: יש דמיון עם הוכחת אוקלידס לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים.