תרגול מס' 8 בחשבון אינפי 2

סדרות וטורים של פונקציות.

הגדרה: סדרה $\{f_n(x)\}$ של פונקציות היא התאמה, שבה לכל n טבעי מתאימה פונקציה $f_n(x)$.

לכל x_0 השייך לתחום ההגדרה של $\{f_n(x)\}$ שנציב, נקבל **סדרת מספרים**: $\{f_n(x_0)\}$.

אם $\{f_n(x_0)\}$ מתכנסת, אז נאמר שסדרת הפונקציות $\{f_n(x)\}$ **מתכנסת נקודתית** ב-x_0.

אם $\{f_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית לכל $x_0 \in I$, אז נאמר ש-$\{f_n(x)\}$ **מתכנסת נקודתית בקטע** I.

הגדרה: בהינתן סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$, **פונקצית הגבול** (אם קיימת) היא: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

דוגמה: קבע התכנסות של: $f_n(x)=x^n$ בקטע $[0,1]$.

פתרון: לכל $x\in[0,1)$ מתקיים: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=0$. עבור $x=1$: $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} x^n=\lim\limits_{n\to\infty} 1^n=1$.

בסה"כ סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בכל $[0,1]$ ופונקצית הגבול היא: $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$.

הגדרה: תהא $\{f_n(x)\}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I. נאמר כי $\{f_n(x)\}$ **מתכנסת במידה שווה בקטע** I, אם: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}\ |\ \forall n>n_0, \forall x\in I:\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

הסבר: תהא $f(x)$ פונקצית הגבול של הסדרה $\{f_n(x)\}$ בקטע I. נגדיר "פס ε" להיות המרווח בין $f(x)-\varepsilon$ ל- $f(x)+\varepsilon$. הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במידה שווה בקטע I לפונקצית הגבול, אם לכל $\varepsilon>0$, קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שממנו והלאה, כל $f_n(x)$ תהיה מוכלת כולה (לאורך הקטע I), בתוך פס ה-ε (סביב פונקצית הגבול).

דוגמה: תהא סדרת הפונקציות $g_k(x)=\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2$ בקטע $[0,1]$.

פונקצית הגבול היא: $g(x)=\lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2=x^2 \quad \forall x\in[0,1]:$.

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת נקודתית בקטע.

נבדוק התכנסות במ"ש: $\left|g_k(x)-g(x)\right|=\left|\left(1+\frac{1}{k}\right)x^2-x^2\right|=\frac{\left|x^2\right|}{k}\le\frac{1}{k} \quad \forall x\in[0,1]:$

ולכן לכל $\varepsilon>0$ נוכל לקחת: $k_0>\frac{1}{\varepsilon}$ ולקבל:

$$\forall k>k_0,\ \forall x\in[0,1]:\ \left|g_k(x)-g(x)\right|<\frac{1}{k}<\frac{1}{k_0}<\varepsilon$$

כלומר k_0 תלוי רק ב- ε ולא ב- x ולכן $g_k(x)$ מתכנסת במידה שווה לפונקצית הגבול בקטע $[0,1]$.

משפט: אם $\left\{f_k(x)\right\}$ פונקציות רציפות ומתכנסות במ"ש בקטע I, אז פונקצית הגבול $f(x)$ רציפה ב- I.

לכן אם קיבלנו שפונקצית הגבול אינה רציפה בקטע I, בהכרח ש $\left\{f_k(x)\right\}$ אינה מתכנסת במ"ש בקטע.

למשל מכאן ש- $f_k(x)=x^k$ אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$ (ראה תרגיל קודם).

ההיפך לא נכון – תיתכן סדרת פונקציות שאינה מתכנסת במ"ש בקטע מסוים, ואף על פי כן פונקצית הגבול שלה רציפה באותו הקטע (דוגמה בהמשך).

משפט (מבחן ה- $\lim-\sup$): סדרת פונקציות $\left\{f_k(x)\right\}$ מתכנסת במידה שווה ל-$f(x)$ בקטע I,

אם"ם: $\lim\limits_{k\to\infty}\left[\sup\limits_{x\in I}\left\{\left|f_k(x)-f(x)\right|\right\}\right]=0$.

תרגיל: קבע התכנסות של $f_k(x)=\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)$ ב: א. $[a,b]$ $a>0$ ב. $(0,\infty)$.

פתרון: נבדוק התכנסות נקודתית: $\forall x_0>0:\quad \lim_{k\to\infty} f_k(x_0)=\lim_{k\to\infty}\ln\left(x_0+\frac{x_0^2}{k}\right)=\ln(x_0)$

כלומר הסדרה מתכנסת נקודתית בשני הסעיפים.

נבדוק התכנסות במ"ש. בסעיף א':

$$\sup_{x\in[a,b]}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in[a,b]}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\ln\left(1+\frac{b}{k}\right)\xrightarrow{k\to\infty}0$$

כלומר ההתכנסות היא במידה שווה.

עבור סעיף ב': $\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\left|\ln\left(x+\frac{x^2}{k}\right)-\ln x\right|\right\}=\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\ln\left(1+\frac{x}{k}\right)\right\}=\infty\xrightarrow{k\to\infty}\neq 0$

כלומר כאן ההתכנסות אינה במ"ש (זו דוגמה לכך שרציפות הפונקציה הגבולית אינה גוררת התכנסות במ"ש).

תרגיל: בדוק התכנסות של סדרת הפונקציות: $f_k(x)=\frac{kx}{1+k^2x^2}$ בקטע $[0,1]$.

פתרון: נמצא את הפונקציה הגבולית: $\forall x\in[0,1]:\quad f(x)=\lim_{k\to\infty}\frac{kx}{1+k^2x^2}=0$

קיבלנו פונקציה רציפה ולכן אנו לא יכולים בשלב הזה לשלול את ההתכנסות במ"ש של הסדרה.

נבדוק זאת עפ"י מבחן ה- $\lim-\sup$: $\sup_{x\in[0,1]}\left\{\left|f_k(x)-f(x)\right|\right\}=\sup_{x\in[0,1]}\left\{\frac{kx}{1+k^2x^2}\right\}$

ההפרש הוא פונקציה רציפה בקטע סגור ולכן ה- $\sup$ הוא גם מקסימום (ויירשטראס 2). נגזור ונאפס:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{nx}{1+k^2x^2}\right)=n\left(\frac{x}{1+k^2x^2}\right)'=k\cdot\frac{1+k^2x^2-x\cdot 2k^2x}{\left(1+k^2x^2\right)^2}=k\cdot\frac{1-k^2x^2}{\left(1+k^2x^2\right)^2}=0$$

נקודת הקיצון מתקבלת בנקודה: $x=\frac{1}{k}\in[0,1]\ \Rightarrow\ 1=k^2x^2$.

לפני $x=\frac{1}{k}$ הנגזרת חיובית ולאחריה שלילית כלומר זו נקודת מקסימום, והיא גלובלית.

מכאן: $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left\{\frac{kx}{1+k^2x^2}\right\}=\left.\frac{kx}{1+k^2x^2}\right|_{x=\frac{1}{k}}=\frac{1}{2}\xrightarrow{k\to\infty}\frac{1}{2}\neq 0$

כלומר הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

הערה: באופן כללי, אין צורך לבדוק אם ישנן נק' קיצון נוספות, שכן אם המבחן תקף בנק' אחת, אז ודאי שיהיה תקף עבור נקודת הקיצון הגלובלית.

תרגיל: הוכח או הפרך:

$\{f_k(x)\}$ מתכנסת במ"ש בקטע I $\Leftarrow$ הפונקציה הגבולית $f(x)$ חסומה ב- I.

פתרון: לא נכון. למשל: $f_k(x)=\frac{1}{x}$ (סדרת פונקציות קבועה) בקטע $(0,1)$. פונקצית הגבול היא $\frac{1}{x}$ ואינה חסומה בקטע $(0,1)$.

טורי פונקציות.

הגדרה: תהא $\{f_k(x)\}$ סדרת פונקציות המוגדרת בקטע I. הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ נקרא **טור פונקציות**.

בכל נקודה $x_0\in I$ הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x_0)$ הוא טור מספרים. נסמן את סדרת הסכומים החלקיים:

$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$, ואת פונקצית הסכום (אם קיימת): $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$. אזי:

הטור מתכנס נקודתית $\Leftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ מתכנסת נקודתית

הטור מתכנס במ"ש בקטע I $\Leftrightarrow$ $\{S_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש בקטע I.

תרגיל: קבע התכנסות של הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}x^{k-1}$ בקטע $(-1,1)$.

פתרון: נכתוב את הסס"ח: $S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=1+x+x^2+...+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$.

מכאן ש: $\forall x\in(-1,1):\ S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^n}{1-x}=\frac{1}{1-x}$.

קיבלנו שפונקצית הסכום מוגדרת בקטע, כלומר הטור מתכנס נקודתית ב- $(-1,1)$.

לגבי התכנסות במ"ש: $\sup_{x\in(-1,1)}\left\{\left|S_n(x)-S(x)\right|\right\}=\sup_{x\in(-1,1)}\left\{\frac{x^n}{1-x}\right\}=\infty\xrightarrow{n\to\infty}\infty\neq 0$

כלומר הטור אינו מתכנס במ"ש בקטע $(-1,1)$ אבל כן מתכנס במ"ש בכל קטע המוכל ממש ב- $(-1,1)$.

הערה: התכנסות במ"ש של $\{f_k(x)\}$ ב- I אינה גוררת התכנסות במ"ש של טור הפונקציות $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$!

דוגמה: הסדרה $f_k(x)=\frac{x}{k}$ מתכנסת במ"ש בכל קטע סופי (a,b), שכן פונק' הגבול היא: $f(x)=0$,

ומתקיים: $\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{x\in(a,b)}\left\{\left|f_k(x)-f(x)\right|\right\}\right]=\lim_{k\to\infty}\left[\sup_{x\in(a,b)}\left\{\frac{|x|}{k}\right\}\right]=\lim_{k\to\infty}\frac{\max\{|a|,|b|\}}{k}=0$.

אבל טור הפונקציות: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x}{k}=x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ מתבדר לכל $x\neq 0$.

הגדרה: בהינתן הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$, ההפרש $r_n(x)=S_n(x)-S(x)$ נקרא **השארית של הטור**.

מתוך מבחן ה- $\lim-\sup$ מתקבל **קריטריון קושי להתכנסות טור פונקציות:**

הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ"ש בקטע I $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}\left[\sup_{x\in I}\left|r_n(x)\right|\right]=0$

<u>בטורי מספרים</u>: הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty}r_n=0$ ($r_n=S_n-S,\ S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k,\ S=\lim_{n\to\infty}S_n$).

תרגיל: הוכח כי הטור $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ מתכנס במ"ש לפונקציה $\sin x$ בקטע $[0,2\pi]$.

פתרון: נשים לב כי הטור הנתון הוא פיתוח מקלורן של $\sin x$. לכן הטור מתכנס נקודתית לפונקציה בקטע.

כמו כן שארית הטור היא למעשה שארית לגרנז': $r_n(x)=R_n(x)=\frac{(-1)^n x^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

נבדוק עפ"י קריטריון קושי התכנסות במידה שווה. מתקיים:

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}\left\{\left|r_n(x)\right|\right\}=\sup_{x\in[0,2\pi]}\left\{\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|\right\}=\sup_{x\in[0,2\pi]}\left\{\frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}\right\}=\frac{(2\pi)^{2n+3}}{(2n+3)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

כלומר הטור מתכנס במ"ש ל-$\sin x$ בקטע $[0,2\pi]$ אבל לא בכל $\mathbb{R}$!