

תרגיל 2 – אלגברה מופשטת 1

1. מצאו את קבוצה המנה G/H של החבורות G לגבי תת החבורות H .

1.1. $H = 5Z, G = Z$

1.2. $H = \{0\} \times R, G = (R^2, +)$

1.3. $H = \{(t, 4t) \mid t \in R\}, G = (R^2, +)$

1.4. $H = \{1, 11\}, G = U_{30}$

1.5. $H = A_n, G = S_n$

1.6. $H = \{z \in C \mid \|z\| = 1\}, G = (C^*, \cdot)$

2. הוכיחו:

2.1. תהי G חבורה, $H, K \leq G$ תתי חבורות מסדר m, n בהתאמה. הוכיחו: אם

$(m, n) = 1$ אזי $H \cap K = \{e\}$

2.2. תהי G חבורה כך ש $|G| < 60$, קיים $a \in G$ מסדר 5 ו $S_3 \leq G$. מצאו את הסדר של G .

3. הוכיחו:

3.1. אם G חבורה אבלית ו $a, b \in G$ איברים מסדר m, n בהתאמה כך ש $(m, n) = 1$,

אזי $o(ab) = mn$

3.2. אם G חבורה אבלית מסדר 6 אז G חבורה ציקלית.

רמז: אם G חבורה מסדר זוגי אז קיים $a \in G$ מסדר 2.

4. ענו על הסעיפים הבאים:

4.1. חשבו $197^{81} \pmod{34}$.

4.2. מצאו את שתי הספרות האחרונות של $20087853^{199} + 876$.

5. יהיו X, Y חבורות ו $f: X \rightarrow Y$ הומומורפיזם. תהי $H \triangleleft X$ ת"ח נורמלית. הוכיחו כי

$f(H)$ ת"ח נורמלית של $f(X)$. האם בהכרח $f(H) \triangleleft Y$?

6. הוכיחו את הטענות הבאות:

6.1. אם $H \leq G$ אז לכל $g \in G, gHg^{-1} \leq G$ ת"ח מסדר $|H|$.

6.2. אם $K \leq H \triangleleft G$ ו H חבורה ציקלית סופית אז $K \triangleleft G$.

7. תהי $D_4 = \langle \sigma, \tau \rangle$ החבורה הדיהדרלית מסדר 4, כש $o(\sigma) = 4, o(\tau) = 2$.

נגדיר: $H = \{e, \tau\}, K = \{e, \tau\}$. הוכיחו כי $H \triangleleft D_4$ ו $K \triangleleft H$ אבל K אינה ת"ח נורמלית של D_4 .

8. יהיו H, K תתי חבורות של G . הוכיחו:

- 8.1. $KH = HK$ כקבוצות, אם ורק אם $HK \leq G$.
- 8.2. אם $H \triangleleft G$ ו $K \leq G$ אזי $HK \leq G$. אם גם $K \triangleleft G$, אזי $HK \triangleleft G$.
- 8.3. קיימת חבורה G ותתי חבורות $H, K \leq G$ שאינן נורמליות כך ש $HK \leq G$.

9. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

9.1. קיים מונומורפיזם $f: GL_2(R) \rightarrow (R^{16}, +)$.

9.2. קיים מונומורפיזם $f: D_7 \rightarrow S_5$.

9.3. קיים אפימורפיזם $f: C^* \rightarrow (R_+, \cdot)$.

9.4. קיים איזומורפיזם $f: (R, +) \rightarrow (R_+, \cdot)$.

9.5. קיים אפימורפיזם $f: Z_{60} \rightarrow D_4$.

10. יהיו $m < n$ טבעיים. הוכיחו כי $m | n$ אם ורק אם קיים מונומורפיזם $f: Z_m \rightarrow Z_n$.

11. מצאו את כל האוטומורפיזמים על $Z_2 \times Z_2$.

12. ענו על הסעיפים הבאים:

12.1. יהיו G חבורה ו $H \triangleleft G$ ת"ח נורמלית כך ש $H \leq Z(G)$. הוכיחו: אם G/H

ציקלית, אז G אבליית.

12.2. תנו דוגמה לחבורה G כך ש $G/Z(G)$ אבליית אך אינה ציקלית.

בהצלחה! 😊